ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 15-2-2012

1.1 <u>Spazio euclideo numerico</u> $\boldsymbol{E^4}$. <u>Riferimento cartesiano canonico</u> RC($O;e_1,e_2,e_3,e_4$). Siano assegnati i vettori $w_1=(1,0,-1,h-1)$, $w_2=(h,1,0,h)$, $w_3=(2h-1,2,1,h+1)$, ed i punti $P_0=O$, $P_1=(1,0,-1,2)$, $P_2=(1,0,-1,0)$, $P_3=(3,1,-1,2)$, $P_4=(1,0,0,1)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori di h in corrispondenza dei quali il sottospazio vettoriale $W_h=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$ ha dimensione due.

(b) In corrispondenza dei valori di h ottenuti nel quesito (a), determinare equazioni cartesiane del piano p_h passante per il punto P_1 ed avente come giacitura il sottospazio vettoriale W_h.

(c) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_2 e P_3.

(d) Studiare la mutua posizione di r e p_h.

(e) Determinare il volume *V* del 4-parallelepipedo individuato dai punti P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4.

Soluzione

(a) L'algoritmo di Gauss-Jordan, per l'estrazione di una base dal sistema di generatori $\{w_1,w_2,w_3\}$ di W_h, dà la base $B_h=(w_1,w_2)$ onde W_h ha dimensione due per ogni valore di h.

(b) Imponendo di avere rango minore di tre alla matrice avente come prime colonne le colonne delle coordinate dei vettori w_1, w_2 e come terza colonna ${}^t(x_1-1,x_2,x_3+1,x_4-2)$ si ha che equazioni cartesiane del piano p_h sono, per esempio, $x_1-hx_2+x_3=0$, $hx_2+(1-h)x_3-x_4+3-h=0$.

(c) Equazioni in forma di rapporti uguali della retta r passante per i due punti distinti P_2 e P_3 sono, per esempio, $(x_1-1)/2=x_2/1=(x_3+1)/0=x_4/2$, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Da tali equazioni si traggono immediatamente le seguenti equazioni parametriche: $x_1=1+2t$, $x_2=t$, $x_3=-1$, $x_4=2t$, $t\in\boldsymbol{R}$ e, per esempio, le seguenti equazioni cartesiane: $x_1-x_4-1=0$, $2x_2-x_4=0$, $x_3+1=0$.

(d) Detto P il punto generico della retta r, essendo $P=(1+2t,t,-1,2t)$, andando a sostituire le coordinate cartesiane di P nelle equazioni cartesiane del piano p_h, si ha il sistema $(2-h)t=0$, $(h-2)t+2=0$ nell'incognita t, che risulta manifestamente incompatibile per ogni $h\in\boldsymbol{R}$. Pertanto per ogni $h\in\boldsymbol{R}$ risulta $r\cap p_h=\emptyset$, ossia retta e piano sono sempre disgiunti, onde, in particolare, retta e piano non sono mai incidenti. I parametri direttori $(l_1,l_2,l_3,l_4)=(2,1,0,2)$ della retta r, sostituiti ordinatamente al posto delle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 nelle equazioni cartesiane $x_1-hx_2+x_3=0$, $hx_2+(1-h)x_3-x_4=0$ della giacitura W_h del piano p_h, danno $2-h=0$, $h-2=0$. Da ciò si trae che la retta r ed il piano p_h risultano paralleli soltanto per h=2. Avendo già provato che r e p_h sono disgiunti per ogni valore di h, possiamo affermare, più precisamente, che, per h=2, r e p_h sono paralleli e disgiunti. Per $h\in(\boldsymbol{R}\setminus\{2\})$, piano e retta, non essendo né incidenti né paralleli, sono sghembi.

(e) Risulta *V* uguale al modulo del determinante della matrice quadrata del quarto ordine avente come righe, rispettivamente, le quaterne delle coordinate dei vettoril P_1-P_0, P_2-P_0, P_3-P_0 e P_4-P_0. Essendo $P_1-P_0=(1,0,-1,2)$, $P_2-P_0=(1,0,-1,0)$, $P_3-P_0=(3,1,-1,2)$ e $P_4-P_0=(1,0,0,1)$, si ha allora $V=|-2|=2$.

1.2. <u>Spazio vettoriale euclideo</u> V <u>dei vettori geometrici.</u> <u>Base ortonormale</u> $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to\boldsymbol{R}$, tale che

$$F(v)=2(v\times u)u-3v,$$

dove con $v\times u$ si indica il prodotto scalare ordinario dei vettori geometrici $v=xi+yj+zk$ ed $u=i-j-k$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.
(b) Determinare una base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.
(c) Considerata la forma bilineare simmetrica reale $b:V\times V\to \boldsymbol{R}$ associata all'endomorfismo simmetrico F e detta $q:V\to \boldsymbol{R}$ la forma quadratica reale ad essa associata, determinare l'espressione di q(v) rispetto alla base ortonormale di autovettori $B_V'=(i',j',k')$.
(d) Dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), dedurre gli indici di positività, di negatività e di nullità nonché il tipo della forma bilineare simmetrica reale b.
(e) Determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

Soluzione

(a) Risulta:

$$F(i)=2(i\times(i-j-k))(i-j-k)-3i=2(i-j-k)-3i=-i-2j-2k,$$

$$F(j)=2((j\times(i-j-k))(i-j-k)-3j=-2(i-j-k)-3j=-2i-j+2k,$$

$$F(k)=2(k\times(i-j-k))(i-j-k)-3k=-2(i-j-k)-3k=-2i+2j-k,$$

onde la matrice A, associata ad F rispetto alla base B_V, ha come righe $A^{(1)}=(-1,-2,-2)$, $A^{(2)}=(-2,-1,2)$, $A^{(3)}=(-2,2,-1)$. Essendo tale matrice simmetrica e B_V una base ortonormale si ha che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) L'equazione caratteristica di F è $\det(A-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+27=0$, ovvero $-(\lambda+3)^2(\lambda-3)=0$, quindi autovalori di F sono $\lambda_1=-3$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=3$, con molteplicità algebrica $a_2=1$. L'autospazio V_{-3}, associato all'autovalore $\lambda_1=-3$, ha equazioni cartesiane $2x-2y-2z=0$, $-2x+2y+2z=0$, $-2x+2y+2z$, ovvero $x-y-z=0$. Si trova immediatamente che l'insieme delle soluzioni dell'ultima equazione è $S_O=\{t_1(1,1,0)+t_2(1,0,1)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, quindi risulta $V_{-3}=\{t_1(i+j)+t_2(i+k)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-3} è costituita dagli autovettori $v_1=i+j$, $v_2=i+k$. Osservato che (v_1,v_2) non è una base ortogonale di V_{-3}, applichiamo a tale base il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Si ha allora che una base ortogonale di V_{-3} è quella costituita dagli autovettori $w_1=v_1=i+j$, $w_2=v_2-(v_2\times w_1/w_1\times w_1)w_1=i+k-(1/2)(i+j)=(1/2)i-(1/2)j+k$. Normalizzando gli autovettori w_1 e w_2, si ha $i'=w_1/|w_1=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$,
$j'=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$. Gli autovettori unitari i', j' costituiscono una base ortonormale di V_{-3}. Equazioni cartesiane dell'autospazio V_3, associato all'autovalore $\lambda_2=3$, sono $-4x-2y-2z=0$, $-2x-4y+2z=0$, $-2x+2y-4z$, ovvero $2x+y+z=0$, $x+2y-z=0$, $x-y+2z=0$. Si ha facilmente che l'insieme delle soluzioni del sistema di tali equazioni è $S_O=\{t(1,-1,-1)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi risulta $V_3=\{t((i-j-k)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$ con base ortonormale costituita dal solo autovettore unitario $k'=(1/\sqrt{3})i-(1/\sqrt{3})j-(1/\sqrt{3})k$ che si ottiene normalizzando l'autovettore $v_3=i-j-k$. Ricordando che autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali si ha che $B_V'=(i',j',k')$ è una base di V del tipo richiesto.

(c) Dalla teoria è noto che la forma bilineare simmetrica reale b, associata ad un endomorfismo simmetrico F, è diagonalizzata da una base ortonormale costituita da autovettori di F ed inoltre la diagonale della matrice associata a b è costituita dagli autovalori di F. Allora rispetto alla base $B_V'=(i',j',k')$, di cui al quesito (b), risulta

$q(v)=-3(x')^2-3(y')^2+3(z')^2$, essendo (x',y',z') le coordinate del vettore v rispetto alla base $B_V'=(i',j',k')$. Tale espressione è nota come forma canonica metrica della forma quadratica reale q.

(d) Dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), si trae che gli indici di positività, di negatività e di nullità di q, e quindi di b, sono, rispettivamente, 1, 2 e 0. Allora la b è una forma bilineare simmetrica non degenere e non definita.

(e) Utilizzando l'espressione $q(v)=-3(x')^2-3(y')^2+3(z')^2$, si ha che l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b è rappresentato dall'equazione cartesiana $-3(x')^2-3(y')^2+3(z')^2=0$. Orbene tale equazione ammette, per esempio, le soluzioni indipendenti (1,0,1), (0,1,1), (-1,0,1). Allora i vettori $u_1=i'+k'$, $u_2=j'+k'$, $u_3=-i'+k'$, costituiscono un esempio di base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

2.1. Spazio euclideo numerico $\boldsymbol{E}^4$. Riferimento cartesiano canonico $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i vettori $w_1=(h+2,2h+1,2,1)$, $w_2=(h+1,h+1,1,0)$, $w_3=(h,1,0,-1)$, ed i punti $P_0=O$, $P_1=(2,1,0,-1)$, $P_2=(0,1,0,-1)$, $P_3=(2,3,1,-1)$, $P_4=(1,3,0,0)$, essendo h un parametro reale.

/a) Determinare i valori di h in corrispondenza dei quali il sottospazio vettoriale $W_h=Span(w_1,w_2,w_3)$ ha dimensione due.

(b) In corrispondenza dei valori di h ottenuti nel quesito (a), determinare equazioni cartesiane del piano p_h passante per il punto P_1 ed avente come giacitura il sottospazio vettoriale W_h.

(c) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_2 e P_3.

(d) Studiare la mutua posizione di r e p_h.

(e) Determinare il volume V del 4-parallelepipedo individuato dai punti P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:

(a) una base di W_h è $B_h=(w_1,w_2)$, onde W_h ha dimensione due per ogni valore di h;

(b) equazioni cartesiane del piano p_h sono, per esempio, $x_1-(h+1)x_3+hx_4+h-2=0$, $x_2-(h+1)x_3+x_4=0$;

(c) equazioni parametriche di r sono: $x_1=2t$, $x_2=1+2t$, $x_3=t$, $x_4=-1$, $t\in\boldsymbol{R}$ ed equazioni cartesiane di r sono, per esempio,: $x_1-2x_3=0$, $x_2-2x_3-1=0$, $x_4+1=0$;

(d) r e p_h sono paralleli e disgiunti per h=1 e sghembi per ogni $h\in(\boldsymbol{R}\setminus\{1\})$;

(e) $V=6$.

2.2. Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici. Base ortonormale $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to\boldsymbol{R}$, tale che

$$F(v)=3v-2(v\times u)u,$$

dove con $v\times u$ si indica il prodotto scalare ordinario dei vettori geometrici $v=xi+yj+zk$ ed $u=i-j+k$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) Determinare una base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(c) Considerata la forma bilineare simmetrica reale $b:V\times V\rightarrow \boldsymbol{R}$ associata all'endomorfismo simmetrico F e detta $q:V\rightarrow \boldsymbol{R}$ la forma quadratica reale ad essa associata, determinare l'espressione di q(v) rispetto alla base ortonormale di autovettori $B_V'=(i',j',k')$.
(d) Dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), dedurre gli indici di positività, di negatività e di nullità nonché il tipo della forma bilineare simmetrica reale b.
(e) Determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2 si ha.

(a) F è simmetrico perché è simmetrica la matrice A, avente come righe $A^{(1)}=(1,2,-2)$, $A^{(2)}=(2,1,2)$ $A^{(3)}=(-2,2,1)$, associata ad F rispetto alla base ortonormale $B_V=(i,j,k)$;

(b) $B_V'=(i',j',k')$ costituita dagli autovettori unitari $i'=(1/\sqrt{3})i-(1/\sqrt{3})j+(1/\sqrt{3})$, $j'=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$, $k'=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$;

(c) $q(v)=-3(x')^2+3(y')^2+3(z')^2$, essendo (x',y',z') le coordinate del vettore v rispetto alla base $B_V'=(i',j',k')$;

(d) dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), si trae che gli indici di positività, di negatività e di nullità di q, e quindi di b, sono, rispettivamente, 2, 1 e 0. Allora la b è una forma bilineare simmetrica non degenere e non definita.

(e) utilizzando l'espressione $q(v)=-3(x')^2+3(y')^2+3(z')^2$, si ha che l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b è rappresentato dall'equazione cartesiana $-3(x')^2+3(y')^2+3(z')^2=0$. Orbene tale equazione ammette, per esempio, le soluzioni indipendenti (1,1,0), (1,0,1), (-1,1,0). Allora i vettori $u_1=i'+j'$, $u_2=i'+k'$, $u_3=-i'+j'$, costituiscono un esempio di base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.