ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 13–2-2013

1.1. <u>Spazio euclideo ordinario</u> ***E***. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(1,-1,1), B(0,1,1), C(1,1,0) e i piani p_1:x-y+z=0, p_2:2x-y+2z-1=0.

(a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela ai piani p_1 e p_2.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto B e perpendicolare alla retta r.

(c) Determinare equazioni cartesiane del fascio di rette contenute nel piano p e passanti per il punto D d'intersezione della retta r con il piano p.

(d) Determinare la retta s del fascio, di cui al quesito (c), perpendicolare alla retta s´:y-2=0, x-z+1=0.

(e) Detto P il punto generico della retta r, determinare l'area *A* del triangolo BCP al variare del punto P sulla retta r.

(f) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali della retta generica passante per il punto A sono (x-1)/l=(y+1)/m=(z-1)/n, dove l, m, n hanno il significato di parametri direttori della retta. Le condizioni di perpendicolarità di tale retta con i piani p_1 e p_2 danno l-m+n=0 e 2l-m+2n=0. Allora parametri direttori della retta r sono, per esempio, (l,m,n)=(1,0,-1). Pertanto equazioni in forma di rapporti uguali della retta r sono (x-1)/l=(y+1)/0=(z-1)/(-1), onde equazioni parametriche e cartesiane della retta r sono rispettivamente x=1+t, y=-1, z=1-t, t$\in$***R,*** e x+z-2=0, y+1=0.

(b) Essendo (l,m,n)=(1,0,-1) parametri direttori della retta r, la condizione di perpendicolarità del piano p con la retta r implica che coefficienti di giacitura del piano p sono, per esempio, (a,b,c)=(1,0,-1). Tenuto conto del passaggio del piano p per il punto B, si ha allora che l'equazione cartesiana del piano p è x-(z-1)=0, ossia x-z+1=0.

(c) Il fascio di rette, sul piano p, passanti per il punto D d'intersezione tra la retta r ed il piano p, può essere ottenuto come intersezione del piano p con il fascio di piani di asse la retta r. Un'equazione cartesiana del fascio di piani di asse la retta r è x+z-2+h(y+1)=0*,* ossia x+hy+z+h-2=0, essendo h un parametro reale. Allora equazioni cartesiane del fascio di rette richiesto sono x+hy+z+h-2=0, x-z+1=0.

(d) La retta generica del fascio di rette, di cui al quesito precedente, ha parametri direttori (-h,2,-h), mentre la retta s´ ha parametri direttori (1,0,1). Allora la condizione di perpendicolarità tra la retta generica del fascio e la retta s´ dà -h-h=0, ossia h=0 e quindi equazioni cartesiane della retta s sono x+z-2=0, x-z+1=0.

(e) L'area *A* del triangolo BCP è uguale a 1/2 del modulo del prodotto vettoriale dei due vettori geometrici rappresentati, rispettivamente, dai segmenti orientati BC e BP, i quali hanno, rispettivamente, coordinate (1,0,-1) e (1+t,-2,-t). Essendo tale prodotto vettoriale uguale al vettore -2i-j-2k, risulta $A=(1/2)|-2i-j-2k|=(1/2)9^{1/2}=3/2$.

(f) L'area *A* del triangolo BCP, di cui nel quesito precedente, non dipende dal parametro reale t, quindi essa è costante al variare del punto P sulla retta r. Tale risultato si giustifica osservando che l'area del triangolo BCP, essendo uguale a 1/2 del prodotto della lunghezza della base BC per la lunghezza dell'altezza relativa a tale base, non cambia al variare del punto P sulla retta r perché la retta r è parallela alla base BC.

1.2. Spazio vettoriale numerico reale V=$\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnate le matrici quadrate reali A, avente come righe $A^{(1)}=(0,0,0,0)$, $A^{(2)}=(2,-7,0,5)$, $A^{(3)}=(0,0,3.0)$, $A^{(4)}=(2,-10,0,8)$, B, avente come righe $B^{(1)}=(3,1,0,1)$, $B^{(2)}=(0,-2,0,0)$, $B^{(3)}=(0,1,0.0)$, $B^{(4)}=(0,0,0,3)$, e C, avente come righe $C^{(1)}=(1,0,0,0)$, $C^{(2)}=(0,2,0,0)$, $C^{(3)}=(0,0,1.0)$, $C^{(4)}=(0,0,0,1)$.

(a) Verificare che la matrice C è invertibile e determinare la matrice inversa C^{-1}.

(b) Dire se qualcuna delle matrici A, B, $D=C^{-1}AC$ è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(c) In corrispondenza di ciascuna delle matrici diagonalizzabili, di cui al quesito (b), determinare una forma diagonale di tale matrice ed una matrice che la diagonalizzi.

Soluzione

(a) Risulta $\det(C)=2\neq0$ e quindi la matrice C, essendo non singolare, è invertibile. Si ha poi subito che la matrice C^{-1}, matrice inversa della matrice C, è la matrice diagonale avente come elementi della diagonale principale ordinatamente 1, 1/2, 1, 1 ossia gli elementi inversi degli elementi della diagonale principale della matrice diagonale C.

(b) Il polinomio caratteristico della matrice A è $\det(A-\lambda I)=-\lambda[(-7-\lambda)(3-\lambda)(8-\lambda)+50(3-\lambda)]=-\lambda(3-\lambda)[\lambda^2-\lambda-6]=\lambda(\lambda-3)^2(\lambda+2)$. Allora l'equazione caratteristica della matrice A è $\lambda(\lambda-3)^2(\lambda+2)=0$. Tale equazione dà gli autovalori $\lambda_1=-2$ con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$ con molteplicità algebrica $a_2=1$ e $\lambda_3=3$ con molteplicità algebrica $a_3=2$. Essendo 4 l'ordine della matrice A ed essendo $a_1+a_2+a_3=4$ si ha intanto che è soddisfatta la prima delle due condizioni richieste per la diagonalizzabilità della matrice. La seconda condizione è espressa dall'uguaglianza della molteplicità geometrica e della molteplicità algebrica di ciascun autovalore. Orbene, da $1\leq g_1\leq a_1=1$ e $1\leq g_2\leq a_2=1$ si ha che $g_1=a_1$ e $g_2=a_2$. Allora per poter asserire che la matrice A è o non è diagonalizzabile occorre determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. A tal proposito consideriamo l'autospazio V_3 della matrice A relativo all'autovalore $\lambda_3=3$, ricordiamo che tale autospazio è per definizione l'autospazio relativo all'autovalore λ_3 dell'endomorfismo $F_A:V\rightarrow V$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica di V. Risulta V_3:$-3x_1=0$, $2x_1-10x_2+5x_4=0$, $0=0$, $2x_1-10x_2+5x_4=0$ e quindi
$V_3=\{t_1(0,0,1,0)+t_2(0,1,0,2)|t_1\ t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_3 è costituita dai due autovettori (0,0,1,0) e (0,1,0,2) e quindi risulta $g_3=\dim(V_3)=2$. Allora è anche $g_3=a_3$. Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.

Passiamo ora a considerare la matrice B. Il polinomio caratteristico della matrice B è $\det(B-\lambda I)=(3-\lambda)[(-2-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda)]=\lambda(\lambda-3)^2(\lambda+2)$. Osservato che il polinomio caratteristico della matrice B coincide con il polinomio caratteristico della matrice A, si ha che gli autovalori della matrice B sono gli stessi e con le stesse molteplicità algebriche della matrice A. Allora per sapere se la matrice B è o non è diagonalizzabile è sufficiente determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. Detto E_3 l'autospazio della matrice B associato all'autovalore $\lambda_3=3$, si ha E_3:$x_2+x_4=0$, $-5x_3=0$, $x_2-x_3=0$, $0=0$ e quindi $E_3=\{t(1,0,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di E_3 è costituita dal solo autovettore (1,0,0,0) onde risulta $g_3=\dim(E_3)=1$. Allora, essendo $g_3=1\neq a_3=2$, la matrice B non è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda la matrice $D=C^{-1}AC$, possiamo affermare che tale matrice è diagonalizzabile perché essa è simile alla matrice diagonalizzabile A.

(c) Una forma diagonale della matrice A è la matrice diagonale A′ che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori -2, 0, 3, 3. Per ottenere una matrice che diagonalizzi la matrice A, determiniamo anzitutto una base di V rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo F_A sia diagonale, ovvero una base di autovettori.

Essendo V_{-2}:$-2x_1=0$, $2x_1-5x_2+5x_4=0$, $5x_3=0$, $2x_1-10x_2+10x_4=0$, e quindi $V_{-2}=\{t(0,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (0,1,0,1); V_0:$0=0$, $2x_1-7x_2+5x_4=0$, $3x_3=0$, $2x_1-10x_2+8x_4=0$, e quindi $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (1,1,0,1), dove con V_{-2} e V_0 abbiamo indicato gli autospazi associati, rispettivamente, agli autovalori $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=0$, ed avendo già determinato una base di autovettori dell'autospazio V_3, si ha che una base di autovettori di V è $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo $v_1'=(0,1,0,1)$, $v_2'=(1,1,0,1)$, $v_3'=(0,0,1,0)$, $v_4'=(0,1,0,2)$.

Una matrice che diagonalizza la matrice A è, per esempio, la matrice M del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V'. Tale matrice, dovendo avere come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1', v_2', v_3', v_4', ha come righe $M^{(1)}=(0,1,0,0)$, $M^{(2)}=(1,1,0,1)$, $M^{(3)}=(0,0,1,0)$, $M^{(4)}=(1,1,0,2)$. Notiamo esplicitamente che risulta $A'=M^{-1}AM$.

Passiamo ora alla matrice diagonalizzabile D. Dall'uguaglianza $D=C^{-1}AC$ si trae $A=CDC^{-1}$. Andando a sostituire CDC^{-1} al posto di A in $A'=M^{-1}AM$, si ha $A'=M^{-1}(CDC^{-1})M=(M^{-1}C)D(C^{-1}M)=(C^{-1}M)^{-1}D(C^{-1}M)$. Allora, posto per comodità $C^{-1}M=N$, risulta $A'=N^{-1}AN$ e quindi una forma diagonale della matrice D è la matrice diagonale A′ mentre una matrice che diagonalizza la matrice D è la matrice invertibile $N=C^{-1}M$, ossia la matrice N avente come righe $N^{(1)}=(0,1,0,0)$, $N^{(2)}=(1/2,1/2,0,1/2)$, $N^{(3)}=(0,0,1,0)$, $N^{(4)}=(1,1,0,2)$.

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario ***E***.</u> RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(-1,1,1), B(1,1,0), C(1,0,1) e i piani p_1:$x-y-z=0$, p_2:$x-2y-2z+1=0$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela ai piani p_1 e p_2.
(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto B e perpendicolare alla retta r.
(c) Determinare equazioni cartesiane del fascio di rette contenute nel piano p e passanti per il punto D d'intersezione della retta r con il piano p.
(d) Determinare la retta s del fascio, di cui al quesito (c), perpendicolare alla retta s′:$z-2=0$, $y-z-1=0$.
(e) Detto P il punto generico della retta r, determinare l'area *A* del triangolo BCP al variare del punto P sulla retta r.
(f) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha:

(a) equazioni parametriche e cartesiane della retta r sono, rispettivamente, $x=-1$, $y=1-t$, $z=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$, e $y+z-2=0$, $x+1=0$;;

(b) equazione cartesiana del piano p è $y-z-1=0$;

(c) equazioni cartesiane del fascio di rette, sul piano p, passanti per il punto D sono $hx+y+z+h-2=0$, $y-z-1=0$;

(d) equazioni cartesiane della retta s sono $x+1=0$, $y-z-1=0$;

(e) $A=3/2$;

(f) l'area *A* del triangolo BCP è costante al variare del punto P sulla retta r perché la retta r è parallela alla base BC del triangolo.

2.2. <u>Spazio vettoriale numerico reale V=$\boldsymbol{R}^4$. Base canonica</u> $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnate le matrici quadrate reali A, avente come righe $A^{(1)}=(0,0,0,0)$, $A^{(2)}=(3,-8,0,5)$, $A^{(3)}=(0,0,2.0)$, $A^{(4)}=(3,-10,0,7)$ B, avente come righe $B^{(1)}=(0,0,0,0)$, $B^{(2)}=(1,2,1,0)$, $B^{(3)}=(1,0,-3.1)$, $B^{(4)}=(1,0,0,2)$, e C, avente come righe $C^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $C^{(2)}=(0,1,0,0)$, $C^{(3)}=(0,0,-2.0)$, $C^{(4)}=(0,0,0,-1)$.

(a) Verificare che la matrice C è invertibile e determinare la matrice inversa C^{-1}.
(b) Dire se qualcuna delle matrici A, B, $D=C^{-1}AC$ è diagonalizzabile, giustificando la risposta.
(c) In corrispondenza di ciascuna delle matrici diagonalizzabili, di cui al quesito (b), determinare una forma diagonale di tale matrice ed una matrice che la diagonalizzi.

Soluzione

(a) Risulta $\det(C)=-2\neq0$ e quindi la matrice C, essendo non singolare, è invertibile. Si ha poi subito che la matrice C^{-1}, matrice inversa della matrice C, è la matrice diagonale avente come elementi della diagonale principale ordinatamente -1, 1, -1/2, -1 ossia gli elementi inversi degli elementi della diagonale principale della matrice diagonale C.

(b) Il polinomio caratteristico della matrice A è $\det(A-\lambda I)=-\lambda[(-8-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)+50(2-\lambda)]=-\lambda(2-\lambda)[\lambda^2+\lambda-6]=\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)$. Allora l'equazione caratteristica della matrice A è $\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$. Tale equazione dà gli autovalori $\lambda_1=-3$ con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$ con molteplicità algebrica $a_2=1$ e $\lambda_3=2$ con molteplicità algebrica $a_3=2$. Essendo 4 l'ordine della matrice A ed essendo $a_1+a_2+a_3=4$ si ha intanto che è soddisfatta la prima delle due condizioni richieste per la diagonalizzabilità della matrice. La seconda condizione è espressa dall'uguaglianza della molteplicità geometrica e della molteplicità algebrica di ciascun autovalore. Orbene, da $1\leq g_1\leq a_1=1$ e $1\leq g_2\leq a_2=1$ si ha che $g_1=a_1$ e $g_2=a_2$. Allora per poter asserire che la matrice A è o non è diagonalizzabile occorre determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. A tal proposito consideriamo l'autospazio V_2 della matrice A relativo all'autovalore $\lambda_3=2$, ricordiamo che tale autospazio è per definizione l'autospazio relativo all'autovalore λ_3 dell'endomorfismo $F_A:V\to V$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica di V. Risulta V_2:$-2x_1=0$, $3x_1-10x_2+5x_4=0$, $0=0$, $3x_1-10x_2+5x_4=0$ e quindi
$V_2=\{t_1(0,0,1,0)+t_2(0,1,0,2)|t_1\ t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_2 è costituita dai due autovettori (0,0,1,0) e (0,1,0,2) e quindi risulta $g_3=\dim(V_3)=2$. Allora è anche $g_3=a_3$. Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.

Passiamo ora a considerare la matrice B. Il polinomio caratteristico della matrice B è $\det(B-\lambda I)=-\lambda[(2-\lambda)^2(-\lambda-3)]=\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)$. Osservato che il polinomio caratteristico della matrice B coincide con il polinomio caratteristico della matrice A, si ha che gli autovalori della matrice B sono gli stessi e con le stesse molteplicità algebriche della matrice A. Allora per sapere se la matrice B è o non è diagonalizzabile è sufficiente determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. Detto E_2 l'autospazio della matrice B associato all'autovalore $\lambda_3=2$, si ha
E_2:$-2x_1=0$, $x_1+x_3=0$, $x_1-5x_3+x_4=0$, $x_1=0$ e quindi $E_2=\{t(0,1,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di E_2 è costituita dal solo autovettore (0,1,0,0) onde risulta $g_3=\dim(E_2)=1$. Allora, essendo $g_3=1\neq a_3=2$, la matrice B non è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda la matrice $D=C^{-1}AC$, possiamo affermare che tale matrice è diagonalizzabile perché essa è simile alla matrice diagonalizzabile A.

(c) Una forma diagonale della matrice A è la matrice diagonale A' che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori -3, 0 ,2 ,2. Per ottenere una matrice che diagonalizzi

la matrice A, determiniamo anzitutto una base di V rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo F_A sia diagonale, ovvero una base di autovettori.
Essendo V_{-3}:$3x_1=0$, $3x_1-5x_2+5x_4=0$, $5x_3=0$, $3x_1-10x_2+10x_4=0$, e quindi $V_{-3}=\{t(0,1,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (0,1,0,1); V_0:$0=0$, $3x_1-8x_2+5x_4=0$, $2x_3=0$, $3x_1-10x_2+7x_4=0$, e quindi $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (1,1,0,1), dove con V_{-3} e V_0 abbiamo indicato gli autospazi associati, rispettivamente, agli autovalori $\lambda_1=-3$ e $\lambda_2=0$, ed avendo già determinato una base di autovettori dell'autospazio V_2, si ha che una base di autovettori di V è $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo $v_1'=(0,1,0,1)$, $v_2'=(1,1,0,1)$, $v_3'=(0,0,1,0)$, $v_4'=(0,1,0,2)$.
Una matrice che diagonalizza la matrice A è, per esempio, la matrice M del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V'. Tale matrice, dovendo avere come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1', v_2' ,v_3', v_4', ha come righe $M^{(1)}=(0,1,0,0)$, $M^{(2)}=(1,1,0,1)$, $M^{(3)}=(0,0,1,0)$, $M^{(4)}=(1,1,0,2)$. Notiamo esplicitamente che risulta $A'=M^{-1}AM$.
Passiamo ora alla matrice diagonalizzabile D. Dall'uguaglianza $D=C^{-1}AC$ si trae $A=CDC^{-1}$. Andando a sostituire CDC^{-1} al posto di A in $A'=M^{-1}AM$, si ha $A'=M^{-1}(CDC^{-1})M=(M^{-1}C)D(C^{-1}M)=(C^{-1}M)^{-1}D(C^{-1}M)$. Allora, posto per comodità $C^{-1}M=N$, risulta $A'=N^{-1}AN$ e quindi una forma diagonale della matrice D è la matrice diagonale A′ mentre una matrice che diagonalizza la matrice D è la matrice invertibile $N=C^{-1}M$, ossia la matrice N avente come righe $N^{(1)}=(0,-1,0,0)$, $N^{(2)}=(1,1,0,1)$, $N^{(3)}=(0,0,-1/2,0)$, $N^{(4)}=(-1,-1,0,-2)$.