## ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Ca)

## (Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

## Testi e soluzioni della Prova Scritta del 12-5-2015

**Esercizio 1.** Determinare:

(i) le equazioni cartesiane della retta $r_1$ passante per il punto $P_1 \equiv (1,-1,1)$ e parallela ai piani $\pi : x - z + 1 = 0$ e $\pi' : y + z + 1 = 0$;

(ii) le equazioni cartesiane della retta $r_2$ passante per il punto $P_2 \equiv (1,-1,0)$ e complanare con le rette $s : x + y - z = 2x - y + 1 = 0$ ed $s' : x + 2y = z - 1 = 0$.

(iii) Dire se le rette $r_1$ ed $r_2$ sono incidenti, parallele, o sghembe;

(iv) calcolare la distanza tra $r_1$ e $r_2$.

*Soluzione.*

(i) La retta $r_1$ può essere ottenuta come intersezione dei due piani $\pi_1$, $\pi_1'$, paralleli rispettivamente a $\pi$ e $\pi'$, e passanti per $P_1$. Questi piani hanno equazione cartesiana:

$$\pi_1 : x - z = d \qquad \pi_1' : y + z = d'$$

dove $d$ e $d'$ si determinano imponendo il passaggio per $P_1$; dunque $d = d' = 0$. Pertanto

$$r_1 : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

(ii) La retta $r_2$ può essere ottenuta come intersezione dei due piani $\pi_2$ e $\pi_2'$ rispettivamente contenenti $s, s'$ e passanti per $P_2$. L'equazione del fascio di piani di asse $s$ (con esclusione del piano $2x - y + 1 = 0$, che non passa per $P_2$) è data da

$$x + y - z + k(2x - y + 1) = 0$$

ed imponendo il passaggio per $P_2$ si ottiene $\pi_2 : x + y - z = 0$. L'equazione del fascio di piani di asse $s'$ (con esclusione del piano $z - 1 = 0$, che non passa per $P_2$) è data da

$$x + 2y + k(z - 1) = 0$$

ed imponendo il passaggio per $P_2$ si ottiene $\pi_2' : x + 2y - z + 1 = 0$. Pertanto la retta $r_2$ cercata ha equazioni

$$r_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

(iii) Le due rette hanno vettori direzione rispettivamente $\overrightarrow{r_1} = (1,-1,1)$ e $\overrightarrow{r_2} = (1,0,1)$, quindi non sono parallele. D'altra parte è immediato verificare che il sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni, quindi le due rette sono sghembe.

(iv) Sia $n$ la retta ortogonale ad entrambe le rette $r_1, r_2$. Questa retta ha vettore direzione $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_2} = (-1,0,1)$ e può ottenersi come intersezione dei piani $\sigma_1, \sigma_2$ contenenti rispettivamente $r_1, r_2$ ed aventi $n$ nella loro giacitura. Il piano $\sigma_1$ avrà vettore normale $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{r_1} = (1,2,1)$ e il piano $\sigma_2$ avrà vettore normale $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{r_2} = (0,2,0)$; tali piani avranno quindi rispettivamente equazioni:

$$\sigma_1 : \quad x + 2y + z = d$$
$$\sigma_2 : \quad y = d'$$

ed imponendo il passaggio di tali piani rispettivamente per $P_1$ e $P_2$ si trova $d = 0$ e $d' = -1$. È ora immediato verificare che la retta $n$ interseca $r_1$ nel punto $Q_1 = (1,-1,1)$ e la retta $r_2$ nel punto $Q_2 = (\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2})$. Pertanto si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + (-1+1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare $F_k : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ data da:

$$F_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k+1 \\ 2k-1 & -1 & 5 & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

dove $k$ è un parametro reale. Si determini, al variare di $k$:

(i) la dimensione e una base del nucleo $U$ dell'applicazione $F_k$;

(ii) la dimensione e una base di un sottospazio complementare $V$ ad $U$ in $\mathbf{R}^4$, cioè tale che $U \oplus V = \mathbf{R}^4$;

(iii) la dimensione e una base dell'immagine $W$ di $F_k$.

*Soluzione.*

(i) Il sottospazio $U = \operatorname{Ker} F_k$ si ottiene risolvendo il sistema lineare

$$(1) \qquad \begin{cases} (k+1)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + (k+1)x_4 = 0 \\ (2k-1)x_1 - x_2 + 5x_3 - 2kx_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k+1 \\ 2k-1 & -1 & 5 & -2k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} A \geq 2$$

Il minore di ordine 2 formato dalla $1^a$ e $2^a$ riga e dalla $2^a$ e $3^a$ colonna è non nullo, infatti

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det B = -2$$

Resta da vedere per quali valori di $k$ $\operatorname{rg} A = 3$. Orlando la matrice $B$, otteniamo le matrici:

$$C = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2k-1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k+1 \\ -1 & 5 & -2k \end{pmatrix}$$

Ora, $\det C = 0$ e $\det D = -2k-2$. Quindi, $\det D = 0$ per $k = -1$. Quindi

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1 \\ 2 & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

*Caso* $k \neq -1$. Il sistema lineare (1) è costituito da 3 equazioni in 4 incognite con $\operatorname{rg} A = 3$, pertanto $\dim(U) = 1$. Considerando $x_1$ come un parametro e quindi ponendolo uguale a 1 si ottiene una soluzione non banale con la formula di Cramer:

$$\overline{x}_1 = 1$$

$$\overline{x}_2 = -\det\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k+1 \\ 2k-1 & 5 & -2k \end{pmatrix} = -\frac{k^2+3k+2}{2k+2}$$

$-2k-2$

$$\overline{x}_3 = -\det\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ 2k-1 & -1 & -2k \end{pmatrix} = -\frac{k^2+k}{2k+2}$$

$-2k-2$

$$\overline{x}_4 = -\det\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2k-1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

$-2k-2$

e tutte le altre sono proporzionali a questa, per cui una base dello spazio delle soluzioni è data da

$$b_1 = (2k+2, -k^2-3k-2, -k^2-k, 0)$$

*Caso* $k = -1$. Dal momento che il minore del secondo ordine $B$ è non nullo, il sistema lineare omogeneo è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}(x_1+x_4) \\ x_3 = \frac{1}{2}(x_1-x_4) \end{cases}$$

In questo caso $\dim(U) = 2$, e una base di $U$ è data da:

$$b_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad b_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

(ii) Le righe del sistema generano lo spazio $V = U^\perp$, e $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.
*Per* $k \neq -1$ esse sono linearmente indipendenti, dunque $\dim(V) = 3$ ed una base di $V$ è data da

$$b_1 = \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ -1 \\ 5 \\ -2k \end{pmatrix}$$

*Per* $k = -1$, le prime due righe sono linearmente indipendenti e la terza dipende linearmente da esse, quindi $\dim(V) = 2$ ed una base di $V$ è data da

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *Caso* $k \neq -1$. Se $W = \operatorname{Im} K_k$, allora $\dim W = \operatorname{rg} F_k = 3$ e $W = \mathbb{R}^3$: una base possibile è quella canonica. *Caso* $k = -1$: ora, $\dim W = \operatorname{rg} F_k = 2$ ed una base di $W$ è costituita, ad esempio, dalle prime due colonne.