**ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)**
**(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)**
**Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 12-2-2014**

1.1 Spazio euclideo numerico $\boldsymbol{E^4}$. Riferimento cartesiano canonico $RC(0;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $P=(0,0,-1,0)$, $Q_k=(k+1,-k+1,2k-1,-2)$, $R=(0,-1,0,0)$ ed $R'=(1,-1,1,1)$, essendo k un parametro reale, e gli iperpiani $h:2x_2+x_3+x_4+1=0$, $h_1:x_1+x_2+x_3+2=0$, $h_2:x_1+x_2+x_4-1=0$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta $r_k$ passante per i punti P e $Q_k$.
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto R e perpendicolare all'iperpiano h.
(c) Determinare equazioni cartesiane della retta s´ passante per il punto R´, parallela agli iperpiani $h_1$ e $h_2$ e perpendicolare alla retta s.
(d) Determinare il valore $k_0$ del parametro k in corrispondenza del quale la retta $r_k$ risulti parallela alla retta s´.
(e) Indicata semplicemente con r la retta $r_k$ corrispondente al valore $k_0$ del parametro k, di cui al quesito precedente, determinare equazioni cartesiane del piano p contenente le rette parallele r ed s´.
(f) Determinare i versori delle rette parallele r ed s´ entrambe orientate secondo le $x_4$ crescenti.

*Soluzione*

(a) Equazioni della retta $r_k$, in forma di rapporti uguali, sono $x_1/(k+1)=x_2/(-k+1)=(x_3+1)/(2k)=x_4/(-2)$. Allora equazioni cartesiane di $r_k$ sono, per esempio, $2x_1+(k+1)x_4=0$, $2x_2-(k-1)x_4=0$, $x_3+kx_4+1 =0$.
(b) Essendo (0,2,1,1) coefficienti di giacitura dell'iperpiano h e tenuto presente del passaggio per il punto $R=(0,-1,0,0)$, si ha che equazioni della retta s, in forma di rapporti uguali, sono, per esempio, $x_1/0=(x_2+1)/2=x_3/1=x_4/1$. Pertanto equazioni cartesiane della retta s sono, per esempio, $x_1=0$, $x_2-2x_4+1=0$, $x_3-x_4=0$.
(c) Essendo (1,1,1,0) e (1,1,0,1) coefficienti di giacitura rispettivamente dell'iperpiano $h_1$ e dell'iperpiano $h_2$, si ha che, detti $(l_1',l_2',l_3',l_4')$ i parametri direttori della retta s´, le condizioni di parallelismo della retta s´ con gli iperpiani $h_1$ e $h_2$ danno $l_1'+l_2'+l_3'=0$ e $l_1'+l_2'+l_4'=0$. Essendo (0,2,1,1) parametri direttori della retta s, la condizione di perpendicolarità della retta s´ con la retta s dà $2l_2'+l_3'+l_4'=0$. Si ha allora, per esempio, $(l_1',l_2',l_3',l_4')=(0,1,-1,-1)$. Tenuto presente che la retta s´ passa per il punto $R'=(1,-1,1,1)$, si ha che equazioni della retta s´ sono, per esempio, $(x_1-1)/0=(x_2+1)/1=(x_3-1)/(-1)=(x_4-1/(-1)$. Pertanto equazioni cartesiane della retta s´ sono, per esempio, $x_1-1=0$, $x_2+x_4=0$, $x_3-x_4=0$.
(d) Essendo (k+1,-k+1,2k,-2) una quaterna di parametri direttori della retta $r_k$ e (0,1.-1,-1) una quaterna di parametri direttori della retta s´, si ha che la condizione di parallelismo tra le rette $r_k$ ed s´ è espressa da $rg(A_k)<2$, essendo $A_k$ la matrice avente come righe tali quaterne di parametri direttori. Risulta facilmente $rg(A_k)<2$ se e soltanto se è $k=-1$ e quindi il valore richiesto del parametro k è $k_0=-1$.
(e) Il piano p contenente le rette parallele r ed s´ può essere ottenuto come piano passante per il punto $P=(0,0,-1,0)$ ed avente come giacitura $W=Span(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,1,-1,-1)$ vettore direttore della rette parallele r ed s´ e $w_2=R'-P=(1,-1,1,1)-(0,0,-1,1)=(1,-1,2,1)$. Si ha allora che equazioni cartesiane del piano p possono essere ottenute imponendo che sia minore di tre il rango della matrice che ha come righe $(x_1,x_2,x_{3,},x_4)$, (0,1,-1,-1) e (1,-1,2,1). Imponendo tale condizione, si ha che equazioni cartesiane del piano p sono, per esempio, $x_1-x_2-x_3-1=0$, $x_2+x_4=0$.

(f) Rette parallele orientate concordemente hanno lo stesso versore. Essendo $w_1=(0,1,-1,-1)$ un vettore direttore delle rette parallele r ed s´, si ha che i versori di tali rette sono i vettori unitari $\pm w_1/|w_1|=\pm(0,1,-1,-1)/3^{½}$. L'orientazione delle rette parallele r ed s´ secondo le $x_4$ crescenti implica che sia positivo il coseno direttore $\cos x_4\hat{}r=\cos x_4\hat{}s´$; ciò avviene scegliendo tra i due versori $\pm w_1/|w_1|=\pm(0,1,-1,-1)/3^{½}$ quello che ha positiva la quarta coordinata e quindi è $vers(r)=vers(s´)=(0,-1,1,1)/3^{½}$.

1.2 <u>Spazio vettoriale euclideo</u> V <u>dei vettori geometrici.</u> <u>Base ortonormale</u> $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_1=-i+j$, $v_2=i+k$, $v_3=-k$.
(a) Verificare che i vettori $v_1$, $v_2$, $v_3$ costituiscono una base dello spazio vettoriale euclideo V.
(b) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base $(v_1,v_2,v_3)$.
(c) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt alla base $(v_1,v_2,v_3)$ e normalizzando, determinare una base ortonormale $B_V´=(i´,j´,k´)$ dello spazio vettoriale euclideo V.
(d) Determinare la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base $B_V$ alla base $B_V´$ e dire di che tipo è tale matrice.
(e) Determinare il vettore $S_W(v)$ immagine del vettore $v=3k$ nella simmetria ortogonale di V rispetto al piano vettoriale $W=Span(v_1,v_2)$.

*Soluzione*

(a) La matrice quadrata che ha come colonne le colonne delle coordinate dei tre vettori $v_1$, $v_2$, $v_3$ ha determinante uguale ad $1\neq0$ e quindi tali vettori sono linearmente indipendenti. Essendo tre la dimensione di V, si ha allora che $(v_1,v_2,v_3)$ è una base di V.
(b) Risulta $\cos v_1\hat{}v_2=v_1\times v_2/(|v_1||v_2|)=-1/2$ implicante $v_1\hat{}v_2=(2/3)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_3=v_1\times v_3/(|v_1||v_3|)=0$ implicante $v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=<v_2\times v_3>/(|v_2||v_3|)=-1/2^{½}$ implicante $v_2\hat{}v_3=(3/4)\pi$.
(c) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base $(v_1,v_2,v_3)$ dà la base ortogonale $(w_1,w_2,w_3)$, essendo
$w_1=v_1=-i+j$,
$w_2=v_2-(v_2\times w_1/w_1\times w_1)w_1=i+k+(1/2)(-i+j)=(1/2)i+(1/2)j+k$,
$w_3=v_3-(v_3\times w_1/w_1\times w_1)w_1-(v_3\times w_2/w_2\times w_2)w_2=-k+(2/3)((1/2)i+(1/2)j+k)=$
$-k+(1/3)i+(1/3)j+(2/3)k=1/3)i+(1/3)j-(1/3)k$. Normalizzando la base ortogonale $(w_1,w_2,w_3)$, si ha la base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$, essendo $i'=w_1/|w_1|=-(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$,
$j'=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$, $k'=w_3/|w_3|=(\sqrt{3}/3)i+(\sqrt{3}/3)j-(\sqrt{3}/3)k$.
(d) La matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base $B_V$ alla base $B_V'$ è la matrice quadrata A avente come colonne le colonne delle coordinate dei vettori unitari $i'$, $j'$, $k'$. Tale matrice è ortogonale perché le basi $B_V$ e $B_V'$ sono ortonormali.
(e) Osserviamo anzitutto che per il teorema di Gram Schmidt risulta $W=Span(v_1,v_2)=Span(w_1,w_2)$ e quindi $W=Span(i',j')$. Allora, essendo $k'$ ortogonale a $j'$ e $j'$, si ha che $k'\in W^{\perp}$. Essendo poi $\dim(W^{\perp})=\dim(V)-\dim(W)=3-2=1$, si ha che $W^{\perp}$ ha una base ortonormale costituita dal solo vettore unitario $k'$. Pertanto risulta $S_W(v)=v-2(v\times k')k'=$ $3k-2((3k)\times k')\,k'=3k+2\sqrt{3}((\sqrt{3}/3)i+(\sqrt{3}/3)j-(\sqrt{3}/3)k)=3k+2i+2j-2k=2i+2j+k$.

---

2.1 Spazio euclideo numerico $\boldsymbol{E^4}$. Riferimento cartesiano canonico RC(0;$e_1$,$e_2$,$e_3$,$e_4$). Siano assegnati i punti P=(0,-1,0,0), $Q_k$=(-2,1-2k,k,2-k), R=(0,0,-1,0) ed R´=(1,1,-1,1), essendo k un parametro reale, e gli iperpiani h:$x_1+x_2+2x_3+1=0$, $h_1$:$x_2+x_3+x_4+2=0$, $h_2$:$x_1+x_3+x_4-1=0$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta $r_k$ passante per i punti P e $Q_k$.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto R e perpendicolare all'iperpiano h.

(c) Determinare equazioni cartesiane della retta s´ passante per il punto R´, parallela agli iperpiani $h_1$ e $h_2$ e perpendicolare alla retta s.

(d) Determinare il valore $k_0$ del parametro k in corrispondenza del quale la retta $r_k$ risulti parallela alla retta s´.

(e) Indicata semplicemente con r la retta $r_k$ corrispondente al valore $k_0$ del parametro k, di cui al quesito precedente, determinare equazioni cartesiane del piano p contenente le rette parallele r ed s´.

(f) Determinare i versori delle rette parallele r ed s´ entrambe orientate secondo le $x_1$ decrescenti.

*Soluzione*

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:

(a) equazioni cartesiane di $r_k$ sono, per esempio, $(k-1)x_1-x_2-1=0$, $kx_1+2x_3=0$, $(k-2)x_1-2x_4=0$;

(b) equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x_1-x_2=0$, $2x_1-x_3-1=0$, $x_4=0$;

(c) equazioni cartesiane di s´ sono, per esempio, $x_1-x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_4-1=0$;

(d) le rette $r_k$ ed s´ risultano parallele per $k= k_0=2$;

(e) equazioni cartesiane di p sono, per esempio, $x_1+x_3=0$; $x_2+x_3-x_4+1=0$;

(f) vers(r)=vers(s´)=$(-1,-1,1,0)/3^{½}$.

2.2 Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici. Base ortonormale $B_V$=(i,j,k). Siano assegnati i vettori $v_1$=j-k, $v_2$=i+k, $v_3$=-i.

(a) Verificare che i vettori $v_1$, $v_2$, $v_3$ costituiscono una base dello spazio vettoriale euclideo V.

(b) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base ($v_1$,$v_2$,$v_3$).

(c) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt alla base ($v_1$,$v_2$,$v_3$) e normalizzando, determinare una base ortonormale $B_V$´=(i´,j´,k´) dello spazio vettoriale euclideo V.

(d) Determinare la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base $B_V$ alla base $B_V$´ e dire di che tipo è tale matrice.

(e) Determinare il vettore $S_W(v)$ immagine del vettore v=3i nella simmetria ortogonale di V rispetto al piano vettoriale W=Span($v_1$,$v_2$).

*Soluzione*

Procedendo come nell'esercizio 1.2 si ha:

(a) i tre vettori $v_1$, $v_2$, $v_3$ costituiscono una base perché risultano linearmente indipendenti ed è dim(V)=3;

(b) risulta $v_1 \wedge v_2=(2/3)\pi$, $v_1 \wedge v_3=\pi/2$, $v_2 \wedge v_3=(3/4)\pi$;

(c) risulta $B_V$′=(i′,j′,k′), essendo i′=$w_1/|w_1|=(1/\sqrt{2})$i-$(1/\sqrt{2})$j,

j′=$w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/(\sqrt{3}))$i+$(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))$j+$(\sqrt{2}/(2\sqrt{3})$k, k′=$w_3/|w_3|=-(\sqrt{3}/3)$i+$(\sqrt{3}/3)$j+$(\sqrt{3}/3)$k;

(d) la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base $B_V$ alla base $B_V'$ è la matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori unitari $i'$, $j'$, $k'$, tale matrice è ortogonale perché le basi $B_V$ e $B_V'$ sono ortonormali;

(e) si ha che $W=\text{Span}(i',j')$ e che $W^{\perp}$ ha una base ortonormale costituita dal solo vettore unitario $k'$, pertanto risulta $S_W(v)=v-2(v\times k')k'=3i-2((3i)\times k')k'=3i+2\sqrt{3}(-(\sqrt{3}/3)i+(\sqrt{3}/3)j+(\sqrt{3}/3)k)=i+2j+2k$.