ESAME DI GEOMETRIA FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 10–5-2012

1. Spazio euclideo. $RC(O, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$.

Assegnato il piano $p : x + y + z - 1 = 0$ e i suoi due punti $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, determinare il quadrato $ABCD$ contenuto nel piano p ed avente A, C come punti diagonalmente opposti.

Soluzione: I punti incogniti B, D sono sull'asse r, contenuto nel piano p, del segmento AC. Per ottenere equazioni parametriche di r, osserviamo innanzitutto che il punto medio di AC è $M(1/2, 1/2, 0)$ e che i parametri direttori della retta per A e C sono $(-1, 1, 0)$. Detti (l, m, n) i parametri direttori dell'asse r, la condizione di perpendicolarità tra r e la retta per A e C e la condizione di parallelismo tra r e p, danno il sistema

$$\begin{cases} -l + m = 0 \\ l + m + n = 0 \end{cases}$$

da cui si ha che parametri direttori per r sono, a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, $(1, 1, -2)$. Quindi equazioni parametriche per r sono

$$x = 1/2 + t\,,\ y = 1/2 + t\,,\ z = -2t\,,\ t \in \mathrm{R}\,.$$

Un punto generico di r è $P(t) = (1/2 + t, 1/2 - t, -2t)$. Per ottenere i punti B e D basta imporre al punto $P(t)$ di avere distanza da M uguale a

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\,(A, C) = \frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Si ottiene allora la condizione

$$\sqrt{t^2 + t^2 + 4t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero l'equazione $6t^2 = 1/2$, da cui

$$t = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Pertanto

$$B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$D\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{2\sqrt{3}}\right).$$

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Assegnato il prodotto scalare

$$\langle v, w \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4$$

ove

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4\,,\quad w = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4$$

i) determinare una base ortonormale C di $W = span(w_1, w_2, w_3)$, ove

$$w_1 = v_1 + v_2\,,\quad w_2 = v_2 + v_3\,,\quad w_3 = v_3 + v_4\,;$$

ii) determinare inoltre la proiezione ortogonale $P_W : V \to W$ e scriverne le equazioni rispetto alle basi B e C.

Soluzione: La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base B è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta inoltre

$$\|v\| = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 + x_4^2\,.$$

I vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti, come si verifica subito considerando la matrice che ha per colonne le componenti di essi. Applicando allora il procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt, si ottiene la base ortogonale di W costituita dai vettori

$$w_1' = w_1 = v_1 + v_2$$

$$w_2' = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1' \rangle}{\|w_1'\|^2} w_1' = -v_1 + v_3$$

$$w_3' = w_3 - \frac{\langle w_3, w_1' \rangle}{\|w_1'\|^2} w_1' - \frac{\langle w_3, w_2' \rangle}{\|w_2'\|^2} w_2' = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + v_4$$

Essendo

$$\|w_1'\| = \sqrt{3}\,,\ \|w_2'\| = \sqrt{3}\,,\ \|w_3'\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

si ha che una base ortonormale C per W è costituita dai vettori

$$u_1 = w_1'/\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}v_2$$

$$u_2 = w_2'/\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}v_3$$

$$u_3 = w_3'/(2\sqrt{3}/3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}v_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}v_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}v_3 + \frac{3}{2\sqrt{3}}v_4$$

La proiezione ortogonale $P_W : V \to W$ è definita da

$$P_W(v) = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_3\rangle u_3$$

essendo $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4$. Risulta

$$\begin{aligned} P_W(v) = \quad & \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \tfrac{2}{\sqrt{3}}x_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)u_1 + \\ & + \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \tfrac{2}{\sqrt{3}}x_3\right)u_2 + \\ & + \left(\tfrac{1}{2\sqrt{3}}x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \tfrac{3}{2\sqrt{3}}x_4\right)u_3 \end{aligned}$$

Dette (y_1, y_2, y_3) le coordinate di $P_W(v)$ in base C, le equazioni di P_W rispetto alle basi B e C sono

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{3}{2\sqrt{3}}x_4 \end{cases}$$