

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Ca)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 10-2-2015

1. Spazio euclideo ordinario. $RC(O;i,j,k)$. Siano assegnate le rette $r_1:x+2z-2=0$, $2x+3z-3=0$ ed $r_2:3x+2z-4=0$, $x+2z=0$.

- Determinare i punti A e C che si ottengono intersecando, rispettivamente, le rette r_1 e r_2 con il piano coordinato xz .
- Verificare che le rette r_1 e r_2 sono parallele e distinte.
- Determinare l'equazione cartesiana del piano p contenente le rette r_1 e r_2 .
- Determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che il quadrilatero ABCD sia un quadrato in cui i punti A e C siano vertici opposti.
- Detto E un punto generico del piano $q:x+z=0$, determinare il volume V del parallelepipedo individuato dai punti A, B, D, E e dire come varia V al variare del punto E sul piano q .
- Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

(a) Il piano coordinato xz è rappresentato dall'equazione cartesiana $y=0$, quindi le coordinate cartesiane del punto A sono soluzione del sistema lineare $x+2z-2=0$, $2x+3z-3=0$, $y=0$. Risolvendo tale sistema, si ha allora $A(0,0,1)$. Ragionando allo stesso modo, si ha poi $C(2,0,-1)$.

(b) Parametri direttori delle rette r_1 ed r_2 , sono, per esempio, $(l_1,m_1,n_1)=(0,1,0)$ e $(l_2,m_2,n_2)=(0,-4,0)$. Essendo tali parametri direttori proporzionali, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono parallele. Le rette parallele r_1 ed r_2 sono poi distinte perché, per esempio, il punto A, che per costruzione appartiene alla retta r_1 , non appartiene anche alla retta r_2 in quanto le sue coordinate cartesiane non soddisfano le equazioni cartesiane di r_2 .

(c) Il piano p , che contiene le rette r_1 ed r_2 , può essere ottenuto, per esempio, come piano passante per il punto A ed avente come giacitura $W=\text{Span}(w_1,w_2)$, essendo $w_1(0,1,0)$ vettore direttore di r_1 e $w_2(2,0,-2)$ il vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AC. Allora, imponendo che abbia determinante nullo la matrice quadrata che ha come righe, rispettivamente, $(x,y,z-1)$, $(0,1,0)$, $(2,0,-2)$, si ha che p ha equazione cartesiana $-2x-2(z-1)=0$, ossia $x+z-1=0$.

(d) Sia M il punto medio dei punti A e C, r la retta passante per tali punti ed r' l'asse del segmento AC sul piano p . Ciò premesso osserviamo che i punti B e D richiesti possono essere ottenuti come punti della retta r' aventi distanza dal punto M uguale alla distanza che hanno dal punto M i punti A e C, ossia aventi distanza uguale a $2^{1/2}$ da tale punto.

Coefficienti di giacitura del piano p sono, per esempio, $(a,b,c)=(1,0,1)$. Un vettore direttore della retta r è il vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AC, quindi parametri direttori della retta r sono, per esempio, $(l,m,n)=(2,0,-2)$. Allora, imponendo alla retta generica passante per il punto medio M, che ha equazioni in forma di rapporti uguali, $(x-1)/l'=y/m'=z/n'$, di essere contenuta nel piano p e di essere perpendicolare alla retta r , si ha che deve risultare $1 \cdot l' + 0 \cdot m' + 1 \cdot n' = 0$ e $2 \cdot l' + 0 \cdot m' - 2 \cdot n' = 0$, ossia $l' + n' = 0$ e $2l' - 2n' = 0$, e quindi, per esempio, $(l',m',n')=(0,1,0)$. Pertanto equazioni in forma di rapporti uguali della retta r' sono, per esempio, $(x-1)/0=y/1=z/0$, onde equazioni parametriche di tale retta sono $x=1$, $y=t'$, $z=0$, $t' \in \mathbf{R}$, e quindi un punto generico P' della retta r' ha coordinate cartesiane $(1,t',0)$, $t' \in \mathbf{R}$. La condizione che P' abbia distanza uguale a $2^{1/2}$ dal punto medio M dà

$((1-1)^2 + (t'-0)^2 + (0-0)^2)^{1/2} = 2^{1/2}$, ossia $(t')^2 = 2$ e quindi $t' = \pm 2^{1/2}$. Pertanto i punti richiesti sono, per esempio, $B(1,-2^{1/2},0)$, $D(1,2^{1/2},0)$.

(e) I vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati AB e AD hanno come coordinate $(1, -2^{1/2}, -1)$ e $(1, 2^{1/2}, -1)$. Inoltre, essendo, per esempio, $x = -t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, equazioni parametriche del piano q e quindi $(-t_2, t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, coordinate cartesiane del punto generico E del piano q, coordinate del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AE sono $(-t_2, t_1, t_2 - 1)$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$. Allora il volume V richiesto, dovendo uguagliare il modulo del prodotto misto dei vettori geometrici rappresentati, rispettivamente, dai segmenti orientati AB, AD, AE, è dato dal modulo del determinante della matrice quadrata avente come righe le terne $(1, -2^{1/2}, -1)$, $(1, 2^{1/2}, -1)$, $(-t_2, t_1, t_2 - 1)$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, di coordinate di tali vettori. Sviluppando tale determinante, e semplificando, si ha $V = 2 \cdot 2^{1/2}$. Tale volume non dipende dai parametri t_1 e t_2 e quindi è costante al variare del punto E sul piano q.

(f) Il parallelepipedo, individuato dai punti A, B, D, E, al variare del punto sul piano q ha sempre la stessa base ABCD, quindi il suo volume V uguaglia il prodotto dell'area del quadrato ABCD per la distanza del punto E dal piano p in cui è contenuto il quadrato. Ma la distanza del punto E dal piano p non varia al variare del punto E sul piano q perché i piani p e q, avendo gli stessi coefficienti di giacitura, sono paralleli. Pertanto il volume V risulta costante, come già stabilito nel quesito precedente.

2. Spazio vettoriale numerico $V = \mathbf{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard. Base canonica $B_V = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Siano assegnati i vettori $v_1 = (0, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, -1)$, $v_4 = (0, 1, -1, 0)$, $v_5 = (0, 2, 0, 2)$ ed il sottospazio vettoriale $U: x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

- Verificare che i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 , costituiscono una base non ortogonale di V.
- Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base (v_1, v_2, v_3, v_4) e normalizzando, determinare una base ortonormale $B_V' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ di V.
- Determinare la matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica $B_V = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ alla base ortonormale $B_V' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ e dire di che tipo è tale matrice, giustificando la risposta.
- Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale U.
- Determinare una base del sottospazio vettoriale U^\perp ortogonale ad U entro V.
- Determinare due vettori u_5 e u_5' appartenenti, rispettivamente, ad U e ad U^\perp in modo tale che risulti $v_5 = u_5 + u_5'$.

Soluzione

(a) La matrice quadrata, che ha come colonne le colonne delle coordinate, rispetto alla base canonica $B_V = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, dei quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 , ha determinante uguale ad $1 \neq 0$ e quindi tali vettori sono linearmente indipendenti. Essendo 4 la dimensione di V, si ha allora che (v_1, v_2, v_3, v_4) è una base di V. Tale base non è ortogonale perché, per esempio, i vettori v_1 e v_3 non sono ortogonali in quanto risulta $v_1 \cdot v_3 = 1 \neq 0$, dove con $v_1 \cdot v_3$ si indica il prodotto scalare standard dei vettori v_1 e v_3 .

(b) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla base (v_1, v_2, v_3, v_4) , dà la base ortogonale (w_1, w_2, w_3, w_4) , essendo

$$w_1 = v_1 = (0, 0, 1, 0),$$

$$w_2 = v_2 - ((v_2 \cdot w_1) / (w_1 \cdot w_1)) w_1 = v_2 - ((v_2 \cdot v_1) / (v_1 \cdot v_1)) v_1 = v_2 = (1, -1, 0, 0),$$

$$w_3 = v_3 - ((v_3 \cdot w_1) / (w_1 \cdot w_1)) w_1 - ((v_3 \cdot w_2) / (w_2 \cdot w_2)) w_2 = v_3 - ((v_3 \cdot v_1) / (v_1 \cdot v_1)) v_1 - ((v_3 \cdot v_2) / (v_2 \cdot v_2)) v_2 = v_3 - v_1 = (0, 0, 1, -1) - (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, -1),$$

$$w_4 = v_4 - ((v_4 \cdot w_1)/(w_1 \cdot w_1))w_1 - ((v_4 \cdot w_2)/(w_2 \cdot w_2))w_2 - ((v_4 \cdot w_3)/(w_3 \cdot w_3))w_3 = v_4 - ((v_4 \cdot v_1)/(v_1 \cdot v_1))v_1 - ((v_4 \cdot v_2)/(v_2 \cdot v_2))v_2 - ((v_4 \cdot (v_3 - v_1))/((v_3 - v_1) \cdot (v_3 - v_1)))(v_3 - v_1) = v_4 + v_1 + (1/2)v_2 =$$

$$(0, 1, -1, 0) + (0, 0, 1, 0) + (1/2, -1/2, 0, 0) = (1/2, 1/2, 0, 0). \text{ Normalizzando la base ortogonale}$$

(w_1, w_2, w_3, w_4) , si ha la base ortonormale $B_V = (v_1', v_2', v_3', v_4')$, essendo $v_1' = w_1 / |w_1| = (0, 0, 1, 0)$, $v_2' = w_2 / |w_2| = (2^{1/2}/2, -2^{1/2}/2, 0, 0)$, $v_3' = w_3 / |w_3| = (0, 0, 0, -1)$, $v_4' = w_4 / |w_4| = (2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2, 0, 0)$.

(c) La matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica $B_V = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ alla base ortonormale $B_V = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ è la matrice quadrata avente come colonne le colonne delle coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori unitari v_1', v_2', v_3', v_4' . Le righe di tale matrice sono, pertanto, $C^{(1)} = (0, 2^{1/2}/2, 0, 2^{1/2}/2)$, $C^{(2)} = (0, -2^{1/2}/2, 0, 2^{1/2}/2)$, $C^{(3)} = (1, 0, 0, 0)$, $C^{(4)} = (0, 0, -1, 0)$. La matrice C è ortogonale perché, essendo la base canonica $B_V = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, essa è una matrice di un cambiamento di basi ortonormali.

(d) Risolvendo il sistema lineare omogeneo che rappresenta il sottospazio vettoriale U, si ha subito, per esempio, $U = \{(-t_2, t_1, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\} = \{t_1(0, 1, 1, 0) + t_2(-1, 0, 0, 1) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}$. Allora una base del sottospazio vettoriale U è, per esempio, $B_U = (u_1, u_2)$, essendo $u_1 = (0, 1, 1, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$. Tale base è ortogonale perché il prodotto scalare standard di u_1 e u_2 è uguale a 0. Normalizzando tale base, si ha la base ortonormale $B_U = (u_1', u_2')$ di U, essendo $u_1' = (0, 2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2, 0)$ e $u_2' = (-2^{1/2}/2, 0, 0, 2^{1/2}/2)$.

(e) Stante il significato geometrico dei coefficienti delle incognite delle equazioni cartesiane omogenee che rappresentano un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo rispetto ad una base ortonormale, un sistema di generatori di U^\perp è costituito dai vettori $u_1' = (1, -1, 1, 1)$, $u_2' = (2, 1, -1, 2)$. I vettori u_1' e u_2' , essendo linearmente indipendenti in quanto non proporzionali, costituiscono una base di U^\perp .

(f) I vettori u_5 e u_5' richiesti sono, rispettivamente, la proiezione ortogonale del vettore v_5 sui sottospazi vettoriali U e U^\perp . Risulta, allora, $u_5 = (v_5 \cdot u_1')u_1' + (v_5 \cdot u_2')u_2' = ((0, 2, 0, 2) \cdot (0, 2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2, 0))(0, 2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2, 0) + ((0, 2, 0, 2) \cdot (-2^{1/2}/2, 0, 0, 2^{1/2}/2))(-2^{1/2}/2, 0, 0, 2^{1/2}/2) = 2^{1/2}(0, 2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2, 0) + 2^{1/2}(-2^{1/2}/2, 0, 0, 2^{1/2}/2) = (0, 1, 1, 0) + (-1, 0, 0, 1) = (-1, 1, 1, 1)$ e $u_5' = v_5 - u_5 = (0, 2, 0, 2) - (-1, 1, 1, 1) = (1, 1, -1, 1)$.