ESAME DI GEOMETRIA FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 10–11-2011

1 . $RA(O, x, y, z)$. Dati il punto $P_0(1, 2, 3)$, il piano $p : y - z = 0$ e la retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = -t$, ove $t \in \mathbb{R}$.

(1) scrivere equazioni cartesiane della retta r_0 passante per P_0 e parallela ad r e l'equazione cartesiana del piano p_0 passante per P_0 e parallelo a p;

(2) determinare le coordinate dei punti $P_1 = p \cap r_0$, $P_2 = r \cap p_0$;

(3) determinare equazioni della retta s passante per P_0, parallela al piano p ed incidente la retta r.

Soluzione: (1) La retta r ha parametri direttori $(1, 2, -1)$. Quindi equazioni parametriche di r_0 sono

$$x = 1 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3 - t\,.$$

Da queste si ottengono rapidamente equazioni cartesiane ricavando $t = x - 1$ dalla prima e sostituendo nelle altre due:

$$r_0 : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Il piano richiesto ha gli stessi parametri di giacitura di p; quindi p_0 ha equazione cartesiana $y - 2 - (z - 3) = 0$, ovvero

$$p_0 : y - z + 1 = 0\,.$$

(2) Le coordinate di P_1 sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases} ;$$

da cui $P_1(4/3, 8/3, 8/3)$.

Le coordinate del punto P_2 sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $P_2(2/3, -2/3, 1/3)$.

(3) La retta s è la retta per i due punti P_0 e P_2. Suoi parametri direttori sono le componenti del vettore di estremi P_0 e P_2, cioè $(-1/3, -8/3, -8/3)$. Essendo questi determinati a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, possiamo assumere come parametri direttori la terna $(1, 8, 8)$ e scrivere equazioni parametriche di s:

$$x = 1 + t,\ y = 2 + 8t,\ z = 3 + 8t\,.$$

Da queste possiamo anche ricavare equazioni cartesiane:

$$s : \begin{cases} 8x - y - 6 = 0 \\ 8x - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

2. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare per quali valori del parametro reale k l'operatore T risulta diagonalizzabile.

(2) Per tali valori, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di T e scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione: (1) Gli autovalori di T si ottengono risolvendo l'equazione

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -x & k & 2 \\ 0 & 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

che ha le soluzioni $0,\ 1,\ -1$ di rispettive molteplicità $2,\ 1,\ 1$. Per un noto teorema l'operatore T risulta diagonalizzabile se e soltanto se l'autospazio $E(0)$, relativo all'autovalore 0, ha dimensione pari alla molteplicità dell'autovalore 0, cioè 2. Determiniamo $E(0)$, che coincide con il nucleo di T. Si deve risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e imporre che lo spazio delle soluzioni abbia dimensione 2, ovvero che la matrice dei coefficienti abbia rango 2. Ciò accade se e solo se tutti i suoi minori di ordine 3 sono nulli, il che si riduce all'unica condizione

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui si ricava $k = -2$.

(2) Determinazione di $E(0)$. Il procedimento è stato indicato al punto (1). Si ha

$$E(0) = \{(u, -u + 2v, v, v) | u, v \in \mathbf{R}\}.$$

Una base per $E(0)$ è $(1, -1, 0, 0), (0, 2, 1, 1)$.

Procedendo analogamente per $E(1)$, si risolva il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo $E(1) = span\{(1, 0, 0, 0)\}$.

Infine, con procedimento analogo, $E(-1) = span\{(1, -2, -1, 0)\}$.

Pertanto la base $\mathcal{B}$ è formata ordinatamente dai vettori

$$(1, -1, 0, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, -2, -1, 0).$$

In tale base l'operatore T è rapprentato dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$