ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 1–2-2012

1.1. <u>Spazio euclideo ordinario</u>. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_0(1,0,0)$, $P_0'(0,1,0)$, le rette r_1:x+y-z-2=0, x-3y+z+1=0, r_2:x+2y+z=0, x+y=0, r_3:x+z-1=0, x-y=0 ed il piano p:x-y+z-2=0.

(a) Determinare la retta r passante per il punto P_0 parallela al piano p e perpendicolare alla retta r_1.
(b) Determinare la retta r´ passante per il punto P_0' e complanare con le rette r_2 ed r_3.
(c) Determinare la mutua posizione delle rette r ed r´.
(d) Determinare la distanza d(r, r´) delle rette r ed r´.
(e) Determinare il versore u della retta r´ orientata verso l'alto.

Soluzione

(a) La retta r può essere ottenuta come intersezione dei due piani p_1 e p_2 passanti per il punto P_0 rispettivamente parallelo al piano p e perpendicolare alla retta r_1. Il piano generico parallelo al piano p ha equazione cartesiana x-y+z+h=0, essendo h un parametro reale. Imponendo il passaggio per P_0 si ha h=-1. Pertanto l'equazione cartesiana di p_1 è x-y+z-1=0. Parametri direttori della retta r_1 sono $(l_1,m_1,n_1)=(1,1,2)$ onde il piano p_2 ha equazione cartesiana x-1+y+2z=0, ossia x+y+2z-1=0. Allora equazioni cartesiane di r sono x-y+z-1=0, x+y+2z-1=0.

(b) La retta r´ può essere ottenuta come intersezione dei due piani p_1' e p_2' passanti per il punto P_0' e contenenti rispettivamente la retta r_2 e la retta r_3. Un'equazione cartesiana del piano generico del fascio F_2 di piani avente come asse la retta r_2 è $x+2y+z+h_2(x+y)=0$, ossia $(1+h_2)x+(2+h_2)y+z=0$, essendo h_2 un parametro reale. Il passaggio per P_0' dà $h_2=-2$ e quindi è p_1':x-z=0. Procedendo in modo analogo per p_2', si ottiene p_2':y+z-1. Allora equazioni cartesiane di r´ sono x-z=0, y+z-1=0.

(c) Il determinante della matrice quadrata del quarto ordine, associata alle equazioni cartesiane delle rette r ed r´, è uguale 4. Pertanto, essendo non nullo tale determinante, le rette r ed r´ sono sghembe. Inoltre, essendo (l,m,n)=(3,1,-2) parametri direttori di r e (l´,m´,n´)=(1,-1,1) parametri direttori di r´, si ha che tali rette sono perpendicolari; infatti risulta ll´+mm´+nn´=3-1-2=0.

(d) Il piano p´, contenente la retta r´ e parallelo alla retta r, ha equazione cartesiana che si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata che ha come righe (x,y-1,z), (1,-1,1) e (3,1,-2). Pertanto risulta p´:x+5y+4z-5=0. Allora, essendo $d(r,r')=d(P_0,p')$, si ha $d(r,r')=|1-5|/(14)^{1/2}= 4/(14)^{1/2}$.

(e) I versori direttori della retta r´ sono $\pm(i-j+k)/(3)^{1/2}$. La condizione sull'orientazione della retta r´ implica che sia positiva la terza coordinata del versore direttore che orienta la retta, quindi il versore richiesto è $u=(i-j+k)/3^{1/2}$.

1.2. <u>Spazi vettoriali euclidei numerici</u> $V=\boldsymbol{R}^3$ e $W=\boldsymbol{R}^4$. Sia assegnata l'applicazione lineare F_h:V→W di equazioni cartesiane, rispetto alle basi canoniche di V e W,

$$y_1=x_1+hx_2+(2h-3)x_3,\ y_2=x_1+x_2-x_3,\ y_3=-x_1+x_2+5x_3,\ y_4=hx_1+x_2-2(h-1)x_3.$$

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W.
(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'applicazione lineare F_h non è iniettiva.

(c) Detta F l'applicazione lineare corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad essa associata, determinare una base del nucleo Ker(F) ed una base dell'immagine Im(F).

(d) Determinare equazioni cartesiane di Im(F) entro W.

(e) Posto U=Ker(F), determinare il vettore P(v), proiezione ortogonale del vettore v=(1,-1,2) sul sottospazio vettoriale $U^{\perp}$, essendo $U^{\perp}$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad U entro V.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(1,h,2h-3)$, $A_h^{(2)}=(1,1,-1)$, $A_h^{(3)}=(-1,1,5)$, $A_h^{(4)}=(h,1,-2h+2)$.

(b) L'applicazione lineare F_h non è iniettiva se e soltanto se è $Ker(F_h)\neq\{0\}$ e quindi se e soltanto se è $dim(Ker\ F_h)\neq 0$. Orbene, poiché l'equazione matriciale del nucleo è $A_hX=0$, dove come al solito si è posto ${}^tX=((x_1,x_2,x_3)$, essendo $dim(KerF_h)=3-rg(A_h)$ si ha che F_h non è iniettiva se e soltanto se è $rg(A_h)<3$. Studiamo dunque tale condizione. Il minore B di A_h, costituito dagli elementi d'incrocio della seconda e terza riga con la prima e seconda colonna, ha determinante non nullo (uguale a 2). Allora, per il teorema degli orlati, si ha che risulta $rg(A_h)<3$ se e soltanto se e soltanto se si annullano i determinanti dei due minori che orlano B. Ora, poiché il determinante di uno di tali minori è identicamente nullo mentre l'altro si annulla soltanto per h=0, si ha che è $h_0=0$.

(c) Osserviamo esplicitamente che, da quanto detto nel corso della risoluzione del quesito (b), per $h=h_0=0$, risulta rg(A)=2 e quindi dim(kerF)=1. Fissando l'attenzione sul minore B, si ha che il sistema che rappresenta Ker(F) è equivalente al sistema $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_1+x_2+5x_3=0$ e quindi è $Ker(F)=\{t(3,-2,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$. Allora una base di Ker(F) è, per esempio, costituita dal solo vettore u=(3,-2,1). Dalla formula dim(Ker(F))+dim(Im(F))=dim(V) si trae dim(Im(F))=3-1=2. Allora per ottenere una base di Im(F), tenuto conto che i vettori colonna della matrice A costituiscono un sistema di generatori di Im(F), basta considerare due vettori colonna non proporzionali, per esempio il primo $w_1=(1,1,-1,0)$ ed il secondo $w_2=(0,1,1,1)$.

(d) Considerata la matrice che ha come prime colonne i due vettori, scritti in colonna, della base di Im(F) e come terza colonna la colonna delle incognite, imponendo che il rango di tale matrice sia minore di tre, si ha che equazioni cartesiane di Im(F) sono, per esempio, $2y_1-y_2+y_3=0$, $-y_2-y_3+2y_4=0$.

(e) $U^{\perp}$ è un iperpiano vettoriale perché U è una retta vettoriale. Ricordando che una base di U è costituita dal solo vettore u=(3,-2,1), si ha

$$P(v)=v-(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=(1,-1,2)-(7/14)(3,-2,1)=(-1/2,0,3/2).$$

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k).</u> Siano assegnati i punti $P_0(0,0,1)$, $P_0'(1,0,0)$, le rette r_1:x-y+z-2=0, 3x-y-z+5=0, r_2:2x+y+z=0, x+z=0, r_3:y+z-1=0, x-z=0 ed il piano p:x-y-z-5=0.

(a) Determinare la retta r passante per il punto P_0 parallela al piano p e perpendicolare alla retta r_1.
(b) Determinare la retta r´ passante per il punto P_0' e complanare con le rette r_2 ed r_3.
(c) Determinare la mutua posizione delle rette r ed r´.
(d) Determinare la distanza d(r, r´) delle rette r ed r´.
(e) Determinare il versore u della retta r´orientata verso il basso.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:

(a) r: x-y-z+1=0, x+2y+z-1=0;

(b) r':$y-z=0$, $x+y-1=0$;
(c) r ed r' sono rette sghembe perpendicolari;
(d) $d(r, r')=4/(14)^{½}$;
(e) $u=(i-j-k)/3^{½}$.

2.2. <u>Spazi vettoriali euclidei numerici V=$\boldsymbol{R^3}$ e W=$\boldsymbol{R^4}$</u>. Sia assegnata l'applicazione lineare F_h:V→W di equazioni cartesiane, rispetto alle basi canoniche di V e W,

$$y_1=(h+1)x_1+(2h-1)x_2+x_3,\ y_2=x_1-x_2+x_3,\ y_3=x_1+5x_2-x_3,\ y_4=x_1-2hx_2+(h+1)x_3.$$

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W.
(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'applicazione lineare F_h non è iniettiva.
(c) Detta F l'applicazione lineare corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad essa associata, determinare una base del nucleo Ker(F) ed una base dell'immagine Im(F).
(d) Determinare equazioni cartesiane di Im(F) entro W.
(e) Posto U=Ker(F), determinare il vettore P(v), proiezione ortogonale del vettore v=(-1,2,1) sul sottospazio vettoriale $U^{\perp}$, essendo $U^{\perp}$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad U entro V.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2 si ha:
(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(h+1,2h-1,1)$, $A_h^{(2)}=(1,-1,1)$, $A_h^{(3)}=(1,5,-1)$, $A_h^{(4)}=(1,-2h,h+1)$;
(b) $h_0=-1$;
(c) una base di Ker(F) è costituita, per esempio dal vettore u=(-2,1,3), una base di Im(F) è costituita, per esempio, dai vettori $w_1=(0,1,1,1)$ e $w_2=(-3,-1,5,2)$;
(d) equazioni cartesiane di Im(F) sono, per esempio, $2y_1-y_2+y_3=0$, $y_2+y_3-2y_4=0$;
(e) $P(v)=v-(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=(-1,2,1)-(7/14)(-2,1,3)=(0,3/2,-1/2)$.