ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Prova scritta del 17–11-2009

1.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2,u_3)$, essendo $u_1=(1,-1,0,1)$, $u_2=(1,1,1,0)$, $u_3=(0,2,1,-1)$ e W: $x_1+x_2-2x_3=0$, $3x_1+x_2-2x_3-2x_4=0$.

(a) Determinare una base, la dimensione ed equazioni cartesiane di U.

(b) Determinare una base e la dimensione di W.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale U' supplementare di U entro U+W.

Soluzione

(a) Risulta $u_3=u_2-u_1$, quindi i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dpendenti. Allora, essendo u_1 e u_2 linearmente indipendenti in quanto non proporzionali, si ha che i vettori u_1, u_2 costituiscono un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti estratto dal sistema di generatori $\{u_1,u_2,u_3\}$ di U e quindi una base di U che indichiamo con B_U. Essendo B_U costituita da due vettori, si ha che $\dim(U)=2$. Equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1+x_2-2x_3=0$, $x_1-x_3-x_4=0$. Tali equazioni si ottengono imponendo che abbia rango minore di tre la matrice che ha per colonne le colonne delle componenti dei vettori u_1, u_2 e del vettore generico $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

(b) Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta W è equivalente al sistema a scala $x_1+x_2-2x_3=0$, $-2x_2+4x_3-2x_4=0$, che dà $x_1=t_2$, $x_2=2t_1-t_2$, $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, essendo t_1 e t_2 parametri reali. Pertanto è $W=\{(t_2,2t_1-t_2,t_1,t_2)\,|\,t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di W è, per esempio, $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,2,1,0)$ e $w_2=u_1=(1,-1,0,1)$ e quindi $\dim(W)=2$.

(c) Un sistema di generatori di U+W è, per esempio $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$. L'algoritmo di Gauss Jordan applicato a tale sistema di generatori dà la base $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, onde $\dim(U+W)=3$.

(d) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono, per esempio, $x_1+x_2-2x_3=0$, $-x_2-x_3-x_4=0$, $x_1+x_2-2x_3=0$, $3x_1+x_2-2x_3-2x_4=0$. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente al sistema a scala $x_1+x_2-2x_3=0$, $-x_2+x_3-x_4=0$, $2x_3=0$, che dà $x_1=t$, $x_2=-t$, $x_3=0$, $x_4=t$, essendo t un parametro reale. Allora è $U\cap W=\{(t,-t,0,t)\,|\,t\in\boldsymbol{R}\}$, con base $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal vettore $w_2=u_1=(1,-1,0,1)$ e $\dim(U\cap W)=1$.

(e) Essendo $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$ una base di U+W che amplia la base $B_U=(u_1,u_2)$ di U, si ha che $U'=Span(w_1)$ è un sottospazio vettoriale di U+W supplementare di U entro U+W.

1.2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x_1+x_3+x_4=1,\ x_1+(2+k)x_3+2x_4=0,\ x_1+(1+k)x_2+x_3-x_4=0,$$

essendo k un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di k.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro k per cui il sistema è compatibile, detta U_k' la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore u_k' appartenente a U_k' ed il sottospazio vettoriale U_k parallelo a U_k', indicandone una base e la dimensione.

Soluzione

(a) Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema assegnato risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare $x_1+x_3+x_4=1$, $(1+k)x_2-2x_4=-1$, $(1+k)x_3+x_4=-1$, che è a scala e compatibile se è $k\neq-1$ mentre non è a scala se è $k=-1$. Applicando ancora il metodo di eliminazione di Gauss Jordan al sistema $x_1+x_3+x_4=1$, $-2x_4=-1$, $x_4=-1$, si ha che, in definitiva, il sistema assegnato, per $k=-1$, risulta equivalente al sistema a scala non compatibile $x_1+x_3+x_4=1$, $x_4=-1$, $0=-3$. Pertanto il sistema è compatibile se e soltanto se è $k\neq-1$ ed è incompatibile per $k=-1$.

(b) Sia $k\neq-1$. Il sistema a scala compatibile $x_1+x_3+x_4=1$, $(1+k)x_2-2x_4=-1$, $(1+k)x_3+x_4=-1$, equivalente a quello assegnato, dà $x_1=(2+k)/(1+k)-(k/(1+k))t$, $x_2=-1/(1+k)+(2/(1+k))t$, $x_3=-1/(1+k)-(1/(1+k))t$,, $x_4=t$, essendo t un parametro reale.

(c) Per $k\neq-1$ un vettore appartenente a U_k' è, per esempio, $u_k'=((2+k)/(1+k))v_1-(1/(1+k))v_2-(1/(1+k))v_3$. Si ha $U_k=\{t(-(k/(1+k))v_1+(2/(1+k))v_2-(1/(1+k))v_3+v_4) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde una base di U_k è costituita dal solo vettore $u_k=-(k/(1+k))v_1+(2/(1+k))v_2-(1/(1+k))v_3+v_4$ e quindi $\dim(U_k)=1$.

2.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=\mathrm{Span}((u_1,u_2,u_3)$, essendo $u_1=(1,1,0,1)$, $u_2=(1,1,1,0)$, $u_3=(1,1,2,-1)$ e W: $x_1+x_2-2x_3=0$, $2x_1-x_2-x_3+x_4=0$.

(a) Determinare una base, la dimensione ed equazioni cartesiane di U.

(b) Determinare una base e la dimensione di W.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale U' supplementare di U entro U+W.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) $B_U=(u_1,u_2)$, $\dim(U)=2$, equazioni cartesiane di U:$x_1-x_2=0$, $x_1-x_3-x_4=0$;

(b) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(1,1,1,0)$, $w_2=(-1,1,0,3)$, $\dim(W)=2$.

(c) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_2)$, $\dim(U+W)=3$;

(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore $w_1=u_2=(1,1,1,0)$, $\dim(U\cap W)=1$;

(e) $U'=\mathrm{Span}(w_2)$.

2.2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x_1+x_3+x_4=1,\ 2x_1+x_3+(1-k)x_4=0,\ x_1+kx_2-x_3-x_4=0,$$

essendo k un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di k.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro k per cui il sistema è compatibile, detta U_k' la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore u_k' appartenente a U_k' ed il sottospazio vettoriale U_k parallelo a U_k', indicandone una base e la dimensione.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile se e soltanto se è $k\neq 0$;

(b) per $k\neq 0$ si ottiene $x_1=-1+kt$, $x_2=3/k-2t$, $x_3=2-(1+k)t$, $x_4=t$, essendo t un parametro reale;

(c) per $k\neq 0$ un vettore appartenente a U_k' è $u_k'=-v_1+(3/k)v_2+2v_3$ e risulta $U_k=\{t(kv_1-2v_2-(1+k)v_3+v_4)\}$, onde una base di U_k è costituita dal solo vettore $kv_1-2v_2-(1+k)v_3+v_4$ e quindi $\dim(U_k)=1$.

<u>3.1. Spazio vettoriale numerico reale</u> V=$\boldsymbol{R}^4$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2,u_3)$, essendo $u_1=(1,-1,0,1)$, $u_2=(-1,1,1,0)$, $u_3=(1,-1,1,2)$ e W: $x_1+x_2-2x_3=0$, $3x_1+x_2-2x_4=0$.

(a) Determinare una base, la dimensione ed equazioni cartesiane di U.

(b) Determinare una base e la dimensione di W.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale U' supplementare di U entro U+W.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) $B_U=(u_1,u_2)$, $\dim(U)=2$, equazioni cartesiane di U:$x_1+x_2=0$, $x_1+x_3-x_4=0$;

(b) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(-1,3,1,0)$, $w_2=(1,-1,0,1)$, $\dim(W)=2$.

(c) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, $\dim(U+W)=3$;

(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore $w_2=u_1=(1,-1,0,1)$, $\dim(U\cap W)=1$;

(e) $U'=Span(w_1)$.

<u>3.2. Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x_1+x_2+x_4=1,\ x_1+(2-k)x_2+2x_4=0,\ x_1+x_2+(1-k)x_3-x_4=0,$$

essendo k un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di k.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro k per cui il sistema è compatibile, detta U_k' la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore u_k' appartenente a U_k' ed il sottospazio vettoriale U_k parallelo a U_k', indicandone una base e la dimensione.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile se e soltanto se è $k\neq 1$;
(b) per $k\neq 1$ si ottiene $x_1=(2-k)/(1-k)+(k/(1-k))t$, $x_2=1/(1-k)-(1/(1-k))t$, $x_3=-1/(1-k)+(2/(1-k))t$,, $x_4=t$, essendo t un parametro reale.
(c) per $k\neq 1$ un vettore appartenente a U_k' è, per esempio, $u_k'=((2-k)/(1-k))v_1+(1/(1-k))v_2-(1/(1-k))v_3$. Si ha $U_k=\{t((k/(1-k))v_1-(1/(1-k))v_2+(2/(1-k))v_3+v_4) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde una base di U_k è costituita dal solo vettore $(k/(1-k))v_1-(1/(1-k))v_2+(2/(1-k))v_3+v_4$ e quindi $\dim(U_k)=1$.

<u>4.1. Spazio vettoriale numerico reale</u> $V=\boldsymbol{R}^4$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2,u_3)$, essendo $u_1=(1,1,1,1)$, $u_2=(1,1,1,0)$, $u_3=(1,1,1,2)$ e W: $x_1+2x_2-3x_3=0$, $x_1+x_2-2x_3-2x_4=0$.
(a) Determinare una base, la dimensione ed equazioni cartesiane di U.
(b) Determinare una base e la dimensione di W.
(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(e) Determinare un sottospazio vettoriale U' supplementare di U entro U+W.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) $B_U=(u_1,u_2)$, $\dim(U)=2$, equazioni cartesiane di U:$x_1-x_3=0$, $x_1-x_2=0$;
(b) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(1,1,1,0)$, $w_2=(4,-2,0,1)$, $\dim(W)=2$;
(c) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_2)$, $\dim(U+W)=3$;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore $w_1=u_2=(1,1,1,0)$, $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $U'=Span(w_2)$.

<u>4.2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x_1+x_2+x_4=1,\ 2x_1+x_2+(1+k)x_4=0,\ x_1-x_2-kx_3-x_4=0,$$

essendo k un parametro reale.
(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di k.
(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.
(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro k per cui il sistema è compatibile, detta U_k' la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore u_k' appartenente a U_k' ed il sottospazio vettoriale U_k parallelo a U_k', indicandone una base e la dimensione.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) il sistema è compatibile se e soltanto se è $k\neq 0$;
(b) per $k\neq 0$ si ottiene $x_1=-1-kt$, $x_2=2-(1-k)t$, $x_3=-3/k-2t$ $x_4=t$, essendo t un parametro reale;
(c) per $k\neq 0$ un vettore appartenente a U_k' è $u_k'=-v_1+2v_2-(3/k)v_2$ e risulta $U_k=\{t(-kv_1-(1-k)v_2-2v_3+v_4) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde una base di U_k è costituita dal solo vettore $-kv_1-(1-k)v_2-2v_3+v_4$ e quindi $\dim(U_k)=1$.