ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 28–1-2010

1.1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i piani p_1:x-y+2z=0 e p_2:x-y+z+1=0, la retta r_1:x+y+2z=0, 2x+y+3z=0 ed i punti P_1(1,0,1) e P_2(0,1,0).

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P_1, parallela al piano p_1 e perpendicolare alla retta r_1.

(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto P_2 e perpendicolare al piano p_2.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del fascio F di piani avente come asse la retta s.

(d) Detto p il piano generico del fascio F, studiare l'intersezione della retta r con il piano p al variare di p in F.

(e) Determinare il versore u_1 normale al piano p_1 e orientato verso il basso.

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali di una retta generica passante per P_1 sono (x-1)/l =y/m = (z-1)/n. Essendo a=1, b=-1, c=2 coefficienti di giacitura di p_1, la condizione di parallelismo con p_1 dà l-m+2n=0. Essendo l_1=1, m_1=1, n_1=-1 parametri direttori di r_1, la condizione di perpendicolarità con r_1 dà l+m-n=0. I parametri direttori di r si ottengono allora risolvendo il sistema lineare omogeneo l-m+2n=0, l+m-n=0. Una soluzione di tale sistema è, per esempio, (l,m,n))=(-1,3,2) e quindi equazioni in forma di rapporti uguali di r sono (x-1)/(-l) = y/3 = (z-1)/2. Allora equazioni cartesiane di r sono, per esempio,
2x+z-3=0, 2y-3z+3=0.

(b) Essendo a=1, b=-1, c=1 coefficienti di giacitura di p_2, la retta s, passante per P_2 e perpendicolare a p_2, ha equazioni in forma di rapporti uguali x/l = (y-1)/(-1) = z/1. Allora equazioni cartesiane di s sono, per esempio, x-z=0, y+z-1=0.

(c) Un'equazione cartesiana del fascio F di piani avente come asse la retta s è, per esempio, x-z+h(y+z-1)=0, ossia x+hy+(h-1)z-h=0, essendo h un parametro reale.

(d) L'intersezione della retta r con il piano p generico del fascio F è rappresentata dal sistema lineare quadrato 2x+z-3=0, 2y-3z+3=0, x+hy+(h-1)z-h=0. Detta A la matrice incompleta associata a tale sistema, risultando det(A)=10h-6 e quindi det(A) ≠0 per h≠3/5,si ha che l'intersezione è costituita da un punto per h≠3/5. Risolvendo il sistema per h≠3/5, si ha che tale punto coincide costantemente con P_1. Per h=3/5 il sistema diventa 2x+z-3=0, 2y-3z+3=0, x+(3/5)y+(-2/5)z-3/5=0. In questo caso, fissando, per esempio l'attenzione sul minore individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A, il cui determinante è 4≠0, si ha che il rango di A è 2 e, usando il teorema di Kronecker, si ha inoltre che il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta. Allora il sistema è compatibile anche per h=3/5 e per tale valore di h esso risulta equivalente, per esempio, al sistema costituito dalle prime due equazioni. Ma le prime due equazioni del sistema rappresentano r e quindi l'intersezione di r con p in questo caso coincide con la retta r, ossia la retta r giace su p. Resta da esaminare l'intersezione di r con il piano di equazione cartesiana y+z-1=0 che, pur appartenendo al fascio F, non può essere rappresentato con l'equazione cartesiana x-z+h(y+z-1)=0. In questo caso il sistema che rappresenta l'intersezione è 2x+z-3=0, 2y-3z+3=0, y+z-1=0. Tale sistema, risultando det(A)=10, ammette un'unica soluzione e quindi l'intersezione è costituita da un solo punto. Si trova subito che il punto in questione coincide con P_1.

(e) Essendo a=1, b=-1, c=2 coefficienti di giacitura di p_1, si ha che i versori normali a p_1 sono $(i-j+2k)/(\pm\sqrt{6})$. Il versore richiesto, dovendo essere oriento verso il basso e quindi secondo le z decrescenti, deve avere la terza coordinata $2/(\pm\sqrt{6})$ negativa. Tale condizione implica che a denominatore vada scelto il seno -. Allora il versore richiesto è $u_1= (-i+j-2k)/(\sqrt{6})$.

1.2. <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale $b : V\times V\to R$, definita da

$$b(v,w)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.

(a) Verificare che b è un prodotto scalare.

(b) Posto $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, scrivere l'espressione di $\langle v,w\rangle$ e $|v|^2$. rispetto alla base B_V.

(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.

(d) Determinare una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

(e) Determinare il vettore $S_W(v_4)$, simmetrico del vettore v_4 nella simmetria ortogonale rispetto a W, essendo $W=Span(v_1,v_2,v_3)$.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(1,-1,0,0)$, $A^{(2)}=(-1,2,0,0)$, $A^{(3)}=(0,0,2,1)$, $A^{(4)}=(0,0,1,2)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=1>0$, $\det(A_{(2,2)})=1>0$, $\det(A_{(3,3)})=2>0$, $\det(A_{(4,4)})=3>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva ossia è un prodotto scalare.

(b) Risulta $\langle v,w\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4$ e $|v|^2=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+2\, x_3^2+2x_3x_4\, +2x_4^2$.

(c) Si ha $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1|\,|v_2|)=-1/(\sqrt{2})\Rightarrow v_1\hat{}v_2=(3/4)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1|\,|v_3|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1|\,|v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2|\,|v_3|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2|\,|v_4|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3|\,|v_4|)=1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/3$.

(d) Per ottenere una base ortonormale applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B_V e normalizziamo. Tale procedimento dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$ $v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_1+v_2\rangle/\langle v_1+v_2,v_1+v_2\rangle)(v_1+v_2)=v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_1+v_2\rangle/\langle v_1+v_2,v_1+v_2\rangle)(v_1+v_2)-(\langle v_4,v_3\rangle/\langle v_3,v_3\rangle)v_3= -(1/2)v_3+v_4$.

Essendo $|w_1|^2=1$, $|w_2|^2=1$, $|w_3|^2=2$, $|w_4|^2=3/2$, si ha che i vettori $u_1=w_1/|w_1|=v_1$, $u_2=w_2/|w_2|=v_1+v_2$, $u_3=w_3/|w_3|=(1/\sqrt{2})v_3$ e $u_4=w_4/|w_4|=-(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4$ costituiscono una base ortonormale di V.

(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $Span(v_1,v_2,v_3)=Span(w_1,w_2,w_3)$. Ovviamente è anche $Span(u_1,u_2,u_3)=Span(w_1,w_2,w_3)$ e quindi (u_1,u_2,u_3) è una base ortonormale di $W=Span(v_1,v_2,v_3)$. Risulta allora $S_W(v_4)=2P_W(v_4)-v_4=2(\langle v_4,u_1\rangle u_1+\langle v_4,u_2\rangle u_2+\langle v_4,u_3\rangle u_3)-v_4=2(\langle v_4,v_1\rangle v_1+\langle v_4,v_1+v_2\rangle(v_1+v_2)+\ \langle v_4,(1/\sqrt{2})v_3\rangle(1/\sqrt{2})v_3)-v_4=v_3-v_4$.

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario</u> E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i piani $p_1:2x-y+z=0$ e $p_2:x-y+z-1=0$, la retta $r_1:2x+y+z+1=0,\ 3x+y+2z-1=0$ ed i punti $P_1(1,0,1)$ e $P_2(0,1,0)$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P_1, parallela al piano p_1 e perpendicolare alla retta r_1.
(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto P_2 e perpendicolare al piano p_2.
(c) Scrivere un'equazione cartesiana del fascio F di piani avente come asse la retta s.
(d) Detto p il piano generico del fascio F, studiare l'intersezione della retta r con il piano p al variare di p in F.
(e) Determinare il versore u_2 normale al piano p_2 e orientato secondo le y crescenti.

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali di una retta generica passante per P_1 sono $(x-1)/l = y/m = (z-1)/n$. Essendo a=2, b=-1, c=1 coefficienti di giacitura di p_1, la condizione di parallelismo con p_1 dà $2l-m+n=0$. Essendo $l_1=1$, $m_1=-1$, $n_1=-1$ parametri direttori di r_1, la condizione di perpendicolarità con r_1 dà $l-m-n=0$. I parametri direttori di r si ottengono allora risolvendo il sistema lineare omogeneo $2l-m+n=0$, $l-m-n=0$. Una soluzione di tale sistema è, per esempio, $(l,m,n))=(2,3,-1)$ e quindi equazioni in forma di rapporti uguali di r sono $(x-1)/2 = y/3 = (z-1)/(-1)$. Allora equazioni cartesiane di r sono, per esempio, $x+2z-3=0$, $y+3z-3=0$.

(b) Essendo a=1, b=-1, c=1 coefficienti di giacitura di p_2, la retta s, passante per P_2 e perpendicolare a p_2, ha equazioni in forma di rapporti uguali $x/l = (y-1)/(-1) = z/1$. Allora equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x-z=0$, $y+z-1=0$.

(c) Un'equazione cartesiana del fascio F di piani avente come asse la retta s è, per esempio, $x-z+h(y+z-1)=0$, ossia $x+hy+(h-1)z-h=0$, essendo h un parametro reale.

(d) L'intersezione della retta r con il piano p generico del fascio F è rappresentata dal sistema lineare quadrato $x+2z-3=0$, $y+3z-3=0$, $x+hy+(h-1)z-h=0$. Detta A la matrice incompleta associata a tale sistema, risultando $\det(A)=-2h-3$ e quindi $\det(A)\neq 0$ per $h\neq -3/2$,si ha che l'intersezione è costituita da un punto per $h\neq -3/2$. Risolvendo il sistema per $h\neq -3/2$, si ha che tale punto coincide costantemente con P_1. Per $h=-3/2$ il sistema diventa $2x+z-3=0$, $2y-3z+3=0$, $x+(-3/2)y+(-5/2)z+3/2=0$. In questo caso, fissando, per esempio l'attenzione sul minore individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A, il cui determinante è $1\neq 0$, si ha che il rango di A è 2 e, usando il teorema di Kronecker, si ha inoltre che il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta. Allora il sistema è compatibile anche per $h=-3/2$ e per tale valore di h esso risulta equivalente, per esempio, al sistema costituito dalle prime due equazioni. Ma le prime due equazioni del sistema rappresentano r e quindi l'intersezione di r con p in questo caso coincide con la retta r, ossia la retta r giace su p. Resta da esaminare l'intersezione di r con il piano di equazione cartesiana $y+z-1=0$ che, pur appartenendo al fascio F, non può essere rappresentato con l'equazione cartesiana $x-z+h(y+z-1)=0$. In questo caso il sistema che rappresenta l'intersezione è $x+2z-3=0$, $y+3z-3=0$, $y+z-1=0$. Tale sistema, risultando $\det(A)=-2$, ammette un'unica soluzione e quindi l'intersezione è costituita da un solo punto. Si trova subito che il punto in questione coincide con P_1.

(e) Essendo a=1, b=-1, c=1 coefficienti di giacitura di p_2, si ha che i versori normali a p_2 sono $(i-j+k)/(\pm\sqrt{3})$. Il versore richiesto, dovendo essere oriento secondo le y crescenti, deve avere la seconda coordinata $-1/(\pm\sqrt{3})$ positiva. Tale condizione implica che a denominatore vada scelto il seno -.Allora il versore richiesto è $u_2=(-i+j-k)/(\sqrt{3})$.

2.2. <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale b $:V\times V\to R$, definita da

$$b(v,w)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+x_3y_3-x_3y_4-x_4y_3+2x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.

(a) Verificare che b è un prodotto scalare.

(b) Posto $b(v,w)=<v,w>$, scrivere l'espressione di $<v,w>$ e $|v|^2$. rispetto alla base B_V.

(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.

(d) Determinare una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare $< , >$.

(e) Determinare il vettore $S_W(v_4)$, simmetrico del vettore v_4 nella simmetria ortogonale rispetto a W, essendo $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(2,1,0,0)$, $A^{(2)}=(1,2,0,0)$, $A^{(3)}=(0,0,1,-1)$, $A^{(4)}=(0,0,-1,2)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=2>0$, $\det(A_{(2,2)})=3>0$, $\det(A_{(3,3)})=3>0$, $\det(A_{(4,4)})=\det(A)=3>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva ossia è un prodotto scalare.

(b) Risulta $\langle v,w\rangle= 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+x_3y_3-x_3y_4-x_4y_3+2x_4y_4$ e $|v|^2=2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2$.

(c) Si ha $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1||v_2|)=1/2\Rightarrow v_1\hat{}v_2=\pi/3$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1||v_3|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1||v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2||v_3)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2||v_4)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3||v_4|)=-1/(\sqrt{2})\Rightarrow v_3\hat{}v_4=(3/4)\pi$.

(d) Per ottenere una base ortonormale applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B_V e normalizziamo. Tale procedimento dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=-(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$
$v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,-(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle-(1/2)v_1+v_2,-(1/2)v_1+v_2\rangle)(-(1/2)v_1+v_2)=v_3$,
$w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-(\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,-(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle-(1/2)v_1+v_2,-(1/2)v_1+v_2\rangle)(-(1/2)v_1+v_2)-(\langle v_4,v_3\rangle/\langle v_3,v_3\rangle)v_3=v_3+v_4$.
Essendo $|w_1|^2=2$, $|w_2|^2=3/2$, $|w_3|^2=1$, $|w_4|^2=1$, si ha che i vettori $u_1=w_1/|w_1|=(1/\sqrt{2})v_1$, $u_2=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/\sqrt{3})(-(1/2)v_1+v_2)$, $u_3=w_3/|w_3|=v_3$ e $u_4=w_4/|w_4|=v_3+v_4$ costituiscono una base ortonormale di V.

(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$. Ovviamente è anche $\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$ e quindi (u_1,u_2,u_3) è una base ortonormale di $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$. Risulta allora $S_W(v_4)=2P_W(v_4)-v_4=2(\langle v_4,u_1\rangle u_1+\langle v_4,u_2\rangle u_2+\langle v_4,u_3\rangle u_3)-v_4=$ $2(\langle v_4,(1/\sqrt{2})v_1\rangle(1/\sqrt{2})v_1+\langle v_4,(\sqrt{2}/\sqrt{3})(-(1/2)v_1+v_2)\rangle(\sqrt{2}/\sqrt{3})(-(1/2)v_1+v_2)+\langle v_4,v_3\rangle v_3)-v_4=-2v_3-v_4$.