ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 1–2-2010

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(1,1,0) e C(1,0,1) e la retta r:x+y-z+2=0, 2x-y-2z-1=0.
(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per i punti A e C e per l'origine O.
(b) Determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che ABCD sia un rombo di area $A=3^{1/2}$.
(c) Scrivere equazioni parametriche della retta s passante per il punto $P_0(1,1,1)$ e parallela alla retta r.
(d) Detto E il punto generico della retta s, calcolare il volume *V* del parallelepipedo individuato dai punti A,B,D,E.
(e) Dire in che modo varia il volume *V* al variare di E su s, giustificando geometricamente la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione cartesiana del piano p, passante per i tre punti O, A e C, si ottiene annullando il determinante della matrice M avente come righe $M^{(1)}=(x,y,z)$, $M^{(2)}=(1,1,0)$, $M^{(3)}=(1,0,1)$. Si ha subito p:x-y-z=0.
(b) I punti B e D appartengono all'asse r′, sul piano p, del segmento AC. Tale asse può essere ottenuto come intersezione del piano p con il piano q passante per il punto medio M(1,1/2,1/2) di AC e perpendicolare ad AC. Essendo (0,-1,1) le coordinate del vettore di estremi A e C, risulta q:-(y-1/2)+(z-1/2)=0, ossia q:y-z=0. Allora equazioni cartesiane di r′ sono x-y-z=0, y-z=0. Da tali equazioni si traggono immediatamente le equazioni parametriche x=2t′, y=t′, z=t′, essendo t′ un parametro reale. Il punto P′ variabile su r′ ha coordinate cartesiane (2t′,t′,t′). La condizione sull'area si esprime imponendo che sia uguale a $3^{1/2}$ l'area del rombo individuato dai punti P,A ,C. Tenendo conto che tale rombo è un parallelogramma, si ha che la sua area è uguale a $(3(1-2t')^2)^{1/2}$ e quindi deve risultare $(3(1-2t')^2)^{1/2}=3^{1/2}$, ossia $3(1-2t')^2=3$, da cui si trae $t_1=0$ e $t_2=1$. Pertanto, a meno di uno scambio, i punti richiesti sono B(0,0,0), ossia l'origine O, e D(2,1,1).
(c) Parametri direttori di r sono l=1, m=0, n=1, quindi equazioni parametriche della retta s, passante per il punto P_0 e parallela alla retta r, sono x=1+t, y=1, z=1+t, essendo t un parametro reale.
(d) Le coordinate del punto E, variabile sulla retta s, sono (1+t,1,1+t). Allora, tenuto conto delle coordinate cartesiane dei punti A,B,D,E, si ha che il volume *V* del parallelepipedo individuato dai punti A,B,D,E è

uguale al modulo del determinante della matrice N avente come righe $N^{(1)}=(-1,-1,0)$, $N^{(2)}=(1,0,1)$, $N^{(3)}=(t,0,1+t)$. Risulta subito $V=1$.

(e) Il volume V è costante perché è uguale a 1 per ogni punto E variabile su s. Tale risultato si giustifica osservando che, risultando la retta s parallela al piano p, l'altezza del parallelepipedo relativa alla base ABCD, contenuta nel piano p, non varia al variare del punto E su s.

2. Spazio vettoriale reale numerico $V=\boldsymbol{R}^3$. Sia assegnato l'endomorfismo $F_k;V\to V$, definito da $F_k(v)=(-x_1+(k+1)x_3,-x_1+x_2+kx_3,-x_1+2x_2-2x_3)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$ e k un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_k associata all'endomorfismo F_k rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3)$ di $\boldsymbol{R}^3$ e scrivere equazioni cartesiane di F_k rispetto a tale base.

(b) Studiare l'endomorfismo F_k al variare di k in $\boldsymbol{R}$, determinandone nucleo ed immagine con rispettive basi e dimensioni e precisando per quali valori di k l'endomorfismo F_k è un automorfismo.

(c) Determinare il valore k_0 del parametro k per cui l'endomorfismo F_k ammette $\lambda=0$ come autovalore.

(d) Indicato con F l'endomorfismo corrispondente a k_0 e con A la matrice associata, verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(e) Detta A' la matrice associata ad F rispetto alla base B_V', determinare una matrice invertibile C tale che $A'=C^{-1}AC$.

Soluzione

(a) La matrice A_k, associata all'edomorfismo F_k rispetto alla base canonica di V ha come righe $A_K^{(1)}=(-1,0,k+1)$, $A_k^{(2)}=(-1,1,k)$ e $A_k^{(3)}=(-1,2,-2)$. Equazioni cartesiane di F_k sono $y_1=-x_1+(k+1)x_3$, $y_2=-x_1+x_2+kx_3$, $y_3=-x_1+2x_2-2x_3$.

(b) Equazioni cartesiane del nucleo $Ker(F_k)$ sono $-x_1+(k+1)x_3=0$, $-x_1+x_2+kx_3=0$, $-x_1+2x_2-2x_3=0$. La matrice associata al sistema lineare omogeneo quadrato che rappresenta $Ker(F_k)$ è A_k. Essendo $\det(A_k)=k+1$, si ha che tale sistema per $k\neq-1$ ammette la soluzione banale come unica soluzione e quindi è $Ker(F_k)=\{(0,0,0)\}$. Per $k=-1$, essendo non nullo, per esempio, il determinante del minore di A_k individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne, si ha che il rango di A_k è 2 e quindi il sistema è equivalente, per esempio, al sistema $-x_1=0$, $-x_1+x_2-x_3=0$. Allora per $k=-1$ è $Ker(F_k)=\{t(0,1,1)\mid t\in\boldsymbol{R}\}$. Dai risultati ottenuti si ha che, per $k\neq-1$, $Ker(F_k)$ non ha basi e quindi la sua dimensione è 0; inoltre dal teorema sulle dimensioni si trae che $\dim(Im(F_k))=\dim(V)-\dim(Ker(F_k))=\dim(V)$ e quindi è $Im(F_K)=V$ ed una base di $im(F_k)$ è, per esempio, la base canonica di V. Sempre per $k \neq -1$, essendo $Ker(F_k)=\{(0,0,0)\}$ e $Im(F_k)=V$, l'endomorfismo F_k è iniettivo e surgettivo e quindi è un automorfismo. Veniamo adesso al caso $k=-1$. Essendo $Ker(F_k)=\{t(0,1,1) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$, una base di $Ker(F_k)$ è costituita dal solo vettore $(0,1,1)$ e $\dim(Ker(F_k))=1$. Dal teorema sulle dimensioni risulta allora $\dim(Im(F_k))=3-1=2$. Essendo i vettori aventi come colonne delle componenti le colonne della matrice A_k un sistema di generatori di $Im(F_k)$, si ha che una base di $Im(F_k)$ è, per esempio, quella costituita dai vettori corrispondenti alle prime due colonne di A_k. In questo caso l'endomorfismo F_k non è né iniettivo né surgettivo e quindi, in particolare, non è un automorfismo.

(c) Ricordando che nell'equazione caratteristica di un endomorfismo il termine noto è uguale al determinante della matrice associata all'endomorfismo, si ha che il valore k_0 del parametro k per cui F_k ammette $\lambda=0$ come autovalore coincide con il valore di k per cui si annulla tale determinante. Ma nel nostro caso è $\det(A_k)=k+1$ e quindi si ha $k_0=-1$.

(d) L'equazione caratteristica di F è $-\lambda(\lambda+1)^2=0$, onde gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=1$. L'autospazio V_{-1}, associato allautovalore $\lambda_1=-1$, ha equazioni cartesiane $-x_1+2x_2-x_3=0$, $-x_1+2x_2-x_3=0$, ossia semplicemente $-x_1+2x_2-x_3=0$ e quindi è $V_{-1}=\{t_1(2,1,0)+t_2(-1,0,1) \mid t_1,t_2 \in \boldsymbol{R}\}$. Allora una base di V_{-1} è, per esempio, quella costituita dagli autovettori $v_1'=(2,1,0)$ e $v_2'=(-1,0,1)$, onde è $\dim(V_{-1})=2$ e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_1=-1$ è $g_1=2$. Osservato che risulta $V_0=Ker(F)=Ker(F_0)$, si ha che una base di V_0 è, per esempio, quella costituita dal solo autovettore $v_3'=(0,1,1)$ e risulta $\dim(V_0)=1$, onde la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2=0$ è $g_2=1$. Allora, essendo $a_1+a_2=3=\dim(V)$ e $g_1=a_1$, $g_2=a_2$, si ha che l'endomorfismo F è diagonalizzabile. Una base di autovettori di V è $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$, essendo v_1',v_2',v_3' gli autovettori appena determinati.

(e) La matrice associata ad F rispetto alla base di autovettori B_V' è la matrice diagonale A' avente come elementi sulla diagonale principale -1, -1, 0. Una matrice invertiile C tale che $A'=C^{-1}AC$ è, per esempio, la matrice che ha come colonne le colonne delle componenti dei vettori v_1',v_2',v_3', ossia la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica di V alla base B_V'.