Algebra 2
Prof. P. Papi
Seconda prova parziale

Esercizio 1. Calcolare campo di spezzamento e gruppo di Galois di $x^7 - 3$ su $\mathbb{Q}$.

Poniamo $p(x) = x^7 - 3$ e siano $\alpha = \sqrt[7]{3}$ e ξ una radice primitiva settima di 1. È chiaro che $E := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$ è un campo di spezzamento di p. L'estensione $E/\mathbb{Q}(\xi)$ è ciclica di Galois e contenendo il campo base una radice settima di 1 segue che $G_1 = Gal(E/\mathbb{Q}(\xi))$ è un sottogruppo di $G := Gal(E/\mathbb{Q})$ ciclico di ordine 7 che è normale perché l'estensione $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ è di Galois (essendo ciclotomica). Inoltre $G_2 = Gal(E/\mathbb{Q}(\xi))$ ha ordine 6 ed è abeliano, quindi ciclico. Dunque $[E : \mathbb{Q}] = [E : \mathbb{Q}(\xi)][\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 42$, pertanto $G \cong C_7 \rtimes C_6$. Più precisamente se $\langle \psi \rangle = G_1, \langle \phi \rangle = G_2$, possiamo assumere che $\psi(\alpha) = \alpha\xi, \psi(\xi) = \xi, \phi(\alpha) = \alpha, \phi(\xi) = \xi^r$ per qualche r la cui classe resto genera $\mathbb{Z}_7^*$, pertanto $\phi\psi\phi^{-1} = \psi^r$. Dunque G ha presentazione $\langle \phi, \psi | \psi^7 = 1, \phi^6 = 1, \phi\psi\phi^{-1} = \psi^r \rangle$.

Esercizio 2. Determinare le estensioni ciclotomiche $\mathbb{F}_7(\xi_5)/\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{11}(\xi_5)/\mathbb{F}_{11}$ e calcolarne il gruppo di Galois.

In generale, se $\mathbb{F}$ è un campo, c'è un'immersione $Gal(\mathbb{F}(\xi_n)/\mathbb{F}) \hookrightarrow U(\mathbb{Z}_n)$. Se $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$, l'immagine di $Gal(\mathbb{F}_p(\xi_n)/\mathbb{F}_p)$ è il gruppo generato dalla classe di p modulo n. Infatti $Gal(\mathbb{F}_p(\xi_n)/\mathbb{F}_p)$ è generato dall'automorfismo di Frobenius ϕ_p, e l'immgine nell' immersione è $\langle p \rangle$. Pertanto $Gal(\mathbb{F}_7(\xi_5)/\mathbb{F}_7)$ ha ordine 4 e $\mathbb{F}_7(\xi_5)$ è il campo con 7^4 elementi; invece $11 \equiv 1 \mod 5$, dunque $\mathbb{F}_{11}(\xi_5) = \mathbb{F}_{11}$.

Esercizio 3. Decidere se il polinomio

$$f(x) = 4x^{10} - 40x^6 - 20x^5 + 100x^2 + 100x + 25$$

è risolubile per radicali.

Osserviamo che $f(x) = (2x^5 - 10x - 5)^2$, pertanto $f(x)$ è risolubile per radicali se e solo se $g(x) = 2x^5 - 10x - 5$. Tale polinomio è irriducibile per il criterio di Eisenstein con $p = 5$ e ha esattamente due radici non reali, perché $g(x)$ è continua e ha massimo relativo in $(-1, 3)$ e minimo relativo in $(1, -13)$. Allora il gruppo di Galois, visto come insieme di permutazioni sulle radici, contiene un 5-ciclo e una trasposizione, che generano S_5. Dunque f non è risolubile per radicali.