Esercizio 1. Sia D_n il gruppo diedrale di ordine $2n$.

1. Determinare gli n per cui D_n è risolubile.
2. Determinare gli n per cui D_n è nilpotente.

Risoluzione: 1. $D_n > C_n > \{1\}$ è una serie normale a quozienti abeliani, quindi D_n è risolubile per ogni n. D_n è nilpotente se e solo se n è una potenza di 2. Se n è una potenza di 2, D_n è un 2-gruppo e quindi è nilpotente. Supponiamo viceversa D_n nilpotente. Se n è dispari, ha centro banale e quindi non può essere nilpotente. Allora $n = 2^r m, m$ dispari. In questo caso D_n ha un quoziente isomorfo a D_m con m dispari che come visto sopra non può essere nilpotente, contraddizione (immagini omomorfe di nilpotenti sono nilpotenti).

Esercizio 2. 1. Classificare i possibili gruppi abeliani di ordine 75.

2. Costruire un gruppo non abeliano G di ordine 75.

Risoluzione: 1. Dal teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti si ha $G \cong C_{25} \times C_3$ o $G \cong C_5 \times C_5 \times C_3$.
2,3. Dai teoremi di Sylow si ha che il 5-Sylow P è normale. Risulta $P \cong C_{25}$ o $P \cong C_5 \times C_5$ e dobbiamo studiare gli omomorfismi $f : C_3 =>x> \to Aut(P)$. Se $P \cong C_{25}$ allora $Aut(P) \cong C_{20}$, che non ha elementi di ordine 3, dunque siamo nel caso abeliano. Se $P \cong C_5 \times C_5$ allora $Aut(P) = GL(2, \mathbb{Z}_5)$, e dobbiamo trovare una matrice di ordine 3: il suo polinomio minimo è $x^2 + x + 1$ e quindi possiamo considerare $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La mappa indotta da $f(x) = A$ definisce la struttura del prodotto semidiretto, che è chiaramente non abeliano.

Esercizio 3. 1. Dimostrare che $\langle a, b | a^4 = 1, a^2 = b^2, ba = ab^{-1} \rangle$ è una presentazione del gruppo $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. delle unità dei quaternioni.

2. Sia G un gruppo non banale il cui sottogruppo di Frattini $F(G)$ è finitamente generato. Dimostrare che G ha un sottogruppo massimale.

Risoluzione: 1. La mappa $i \mapsto a, j \mapsto b$ dà luogo a un epimorfismo dal gruppo G presentato come sopra a Q (infatti le relazioni vanno a zero: $i^4 = 1, i^2 = j^2, ji = -ij$). Basta allora vedere che $|G| \leq 8$. Usando le relazioni si ha che gli elementi di G sono un sottoinsieme di $\{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$.

2. Se G non ha sottogruppi massimali, risulta $G = F(G) = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Ma gli x_i sono non generatori, dunque $G = \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{1\}$, contraddizione.

Esercizio 4. 1. Sia Q il gruppo delle unità dei quaternioni. Dimostrare che

$$\rho(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}, & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \qquad \rho(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiscono una rappresentazione $\rho : Q \to GL(2, \mathbb{C})$. Dimostrare che tale rappresentazione è irriducibile.

2. Dimostrare che ρ è l'unica rappresentazione irriducibile di grado 2 di Q.

Risoluzione: 1. Le relazioni della presentazione contenuta nell'esercizio 3 sono verificate, quindi ρ è una rappresentazione. Un sottomodulo proprio ha necessariamente dimensione 1, ma le sole rette stabili per $\rho(i)$ sono gli assi coordinati, che non sono stabili per $\rho(j)$.

2. Se ci fossero due rappresentazioni irriducibili di grado due, nella formula $\sum_i n_i^2 = |G|$ (ove gli n_i sono i gradi delle rappresentazioni irriducibili), avremmo $4 + 4 = 8$ e non ci sarebbe posto per la rappresentazione banale.