ANALISI

Soluzione esercizi

20 gennaio 2012

12.1. Esercizio. *Disegnare i seguenti insiemi di $\mathbb{R}^2$ e dire se sono o meno aperti, chiusi, limitati:*

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y^2) \leq 1/2\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathcal{Z}\}$
- $\{(n, m) : n \in \mathcal{Z}, m \in \mathcal{Z}\}$ essendo $\mathcal{Z}$ l'insieme degli interi positivi e negativi.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é il semipiano al di sotto della retta $x = y$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3\}$ é la striscia verticale delimitata dalle due rette $x = 2$ e $x = 3$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$ é il semicerchio di centro l'origine, raggio 1 relativo al semipiano sopra la retta $y = -x$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y^2) \leq 1/2\}$ é il cerchio $x^2 + y^2 \leq \pi/3$ e la famiglia di corone circolari

  $$k\pi - \pi/3 \leq x^2 + y^2 \leq k\pi + \pi/3, \quad k = 1, 2, ...$$

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathcal{Z}\}$ é la famiglia di rette orizzontali corrispondenti a $y = 0$, $y = \pm 1$, $y = \pm 2, ...$
- $\{(n, m) : n \in \mathcal{Z}, m \in \mathcal{Z}\}$ é la totalitá dei punti del piano a coordinate intere.

12.2. Esercizio. *Posto*

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{\sin(n)}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

stabilire se la successione $\{P_n\}$ di $\mathbb{R}^3$ è convergente.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Una successione $\{P_n\} \in \mathbb{R}^3$ é convergente se e solo se sono convergenti le tre successioni delle coordinate:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 \\ \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = (0,1,0)$$

12.3. Esercizio. *Posto* $P_n = \left((-1)^n, (-1)^{n^2}, (-1)^{n^3}\right)$, $n \geq 1$,

- *provare che la successione* $\{P_n\}$ *è limitata;*
- *trovare almeno due sottosuccessioni convergenti.*

Soluzione:

La successione $\{P_n\}$ é limitata, infatti

$$|P_n| = \sqrt{((-1)^n)^2 + ((-1)^{n^2})^2 + ((-1)^{n^3})^2} = \sqrt{3}$$

Tenuto presente che se n é pari sono pari anche n^2 ed n^3, mentre se n é dispari sono dispari anche n^2 ed n^3 si riconosce che

- la sottosuccessione $\{P_{2n}\}$ dei termini di indice pari é costante, $P_{2m} = (1,1,1)$,
- la sottosuccessione $\{P_{2m+1}\}$ dei termini di indice dispari é costante, $P_{2m} = (-1,-1,-1)$

Tali due sottosuccessioni della $\{P_n\}$ sono convergenti.

12.4. Esercizio. *Data la curva di equazioni parametriche (asteroide)*

$$x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0)$$

- *verificare che* γ *è una curva regolare;*
- *calcolare la lunghezza di* γ.

Soluzione:

La rappresentazione parametrica di γ é formata da funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$: resta pertanto da verificare solo se

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0, \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2(t)\sin(t) \\ y'(t) = 3a\sin^2(t)\cos(t) \end{cases} \to (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2\sin^2(t)\cos^2(t)$$

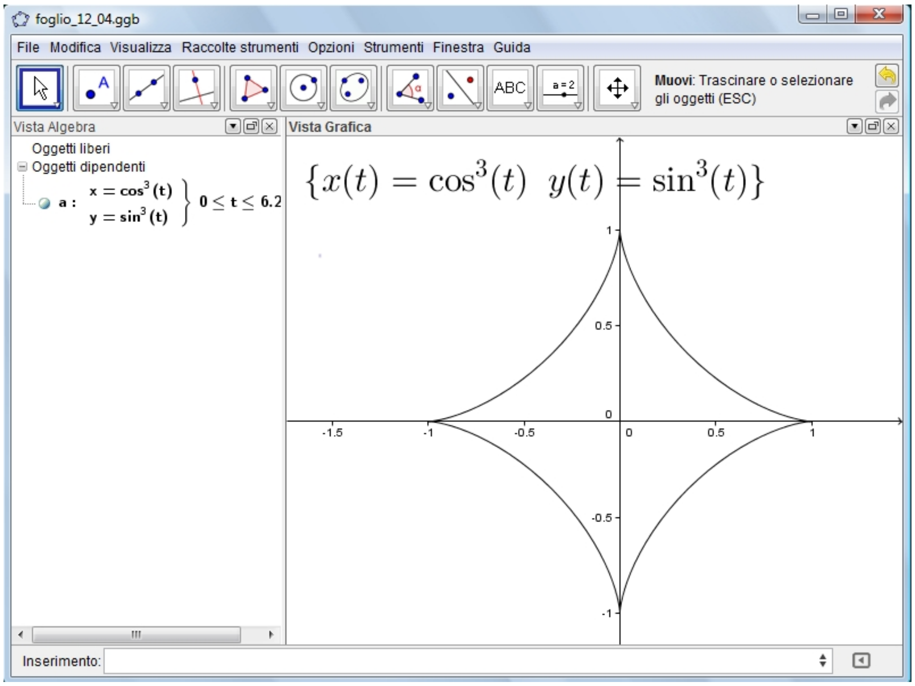

FIGURA 1. $\{x(t) = \cos^3 t;\ y(t) = \sin^3 t\}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Si riconosce pertanto che le derivate prime $x'(t)$, $y'(t)$ si annullano entrambe contemporaneamente nei punti

$$t = 0, \quad t = \pi/2, \quad t = \pi, \quad t = 3\pi/2, \quad t = 2\pi$$

Pertanto la curva γ assegnata é

regolare a tratti

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \quad \to \quad \ell = \int_0^{2\pi} 3a\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)}dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\cos(t)\sin(t)dt = 6a$$

Vedi anche
http://www.mathcurve.com/courbes2d/astroid/astroid.shtml

12.5. Esercizio. *Data la curva di equazioni parametriche (elica cilindrica)*

$$x = \cos t;\ y = \sin t;\ z = t, \quad 0 \le t \le 6\pi$$

verificare che è regolare e calcolarne la lunghezza.

SOLUZIONE:

La curva é regolare, infatti le equazioni parametriche sono C^∞ e riesce

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) + 1 = 2 > 0$$

La lunghezza é semplicissima

$$\ell = \int_0^{6\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{2} dt = 6\sqrt{2}\pi$$

12.6. Esercizio. Calcolare la lunghezza della curva in forma polare $\rho = e^\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (*spirale logaritmica*).

SOLUZIONE:

Dalla forma polare si passa agevolmente a quella cartesiana

$$\begin{array}{lllll} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) & \to & x(\theta) = e^\theta \cos(\theta) & \to & x'(\theta) = e^\theta \cos(\theta) - e^\theta \sin(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) & \to & x(\theta) = e^\theta \sin(\theta) & \to & y'(\theta) = e^\theta \sin(\theta) + e^\theta \cos(\theta) \end{array}$$

Ne segue, in generale,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)$$

da cui

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 2e^{2\theta} \quad \to \quad \ell = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^\theta \, d\theta = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$$

12.7. Esercizio. *Calcolare la lunghezza della curva in forma polare* $\rho = (1 + \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ *(cardioide).*

SOLUZIONE:

Nel passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane si ha, in generale,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)$$

da cui, per la cardioide assegnata,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \sin^2(\theta) + (1 + \cos(\theta))^2 = 2(1 + \cos(\theta))$$

Tenuto conto che

$$2(1 + \cos(\theta)) = 2\left(1 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

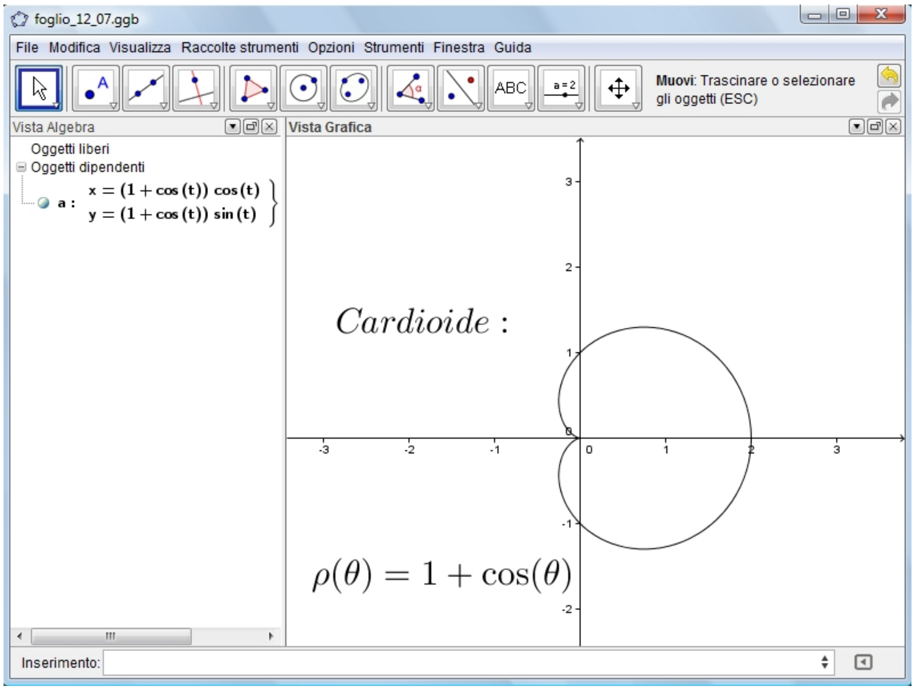

FIGURA 2. $\rho = (1 + \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

si ha
Da cui

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos(\theta))}\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) ds = 8$$

Vedi anche
http://www.mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml.

12.8. Esercizio. *Determinare e disegnare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni*

$$f(x,y) = \sqrt{x\,y + y^2},$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-4},$$
$$f(x,y) = \log(4 - x^2 - 9y^2)$$

SOLUZIONE:

$$\boxed{f(x,y) = \sqrt{x\,y + y^2}}$$

$$x\,y + y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \{(y \ge 0) \cap (x + y \ge 0)\} \cup \{(y \le 0) \cap (x + y \le 0)\}$$

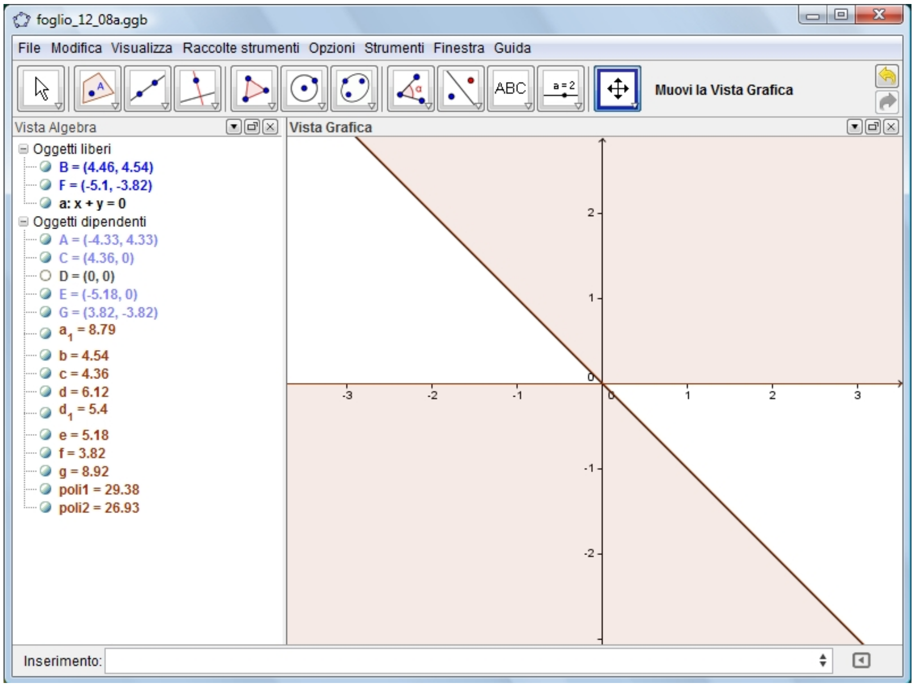

FIGURA 3. $x\,y + y^2 \geq 0$

$\boxed{f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-4}}$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 & \to \quad x \leq -2 \cup 2 \leq x \\ y^2 - 4 \geq 0 & \to \quad y \leq -2 \cup 2 \leq y \end{cases}$$

$\boxed{f(x,y) = \log(4 - x^2 - 9y^2)}$

$$4 - x^2 - 9y^2 > 0 \quad \to \quad x^2 + 9y^2 < 4$$

Si tratta della regione delimitata dalla curva ellisse, esclusa la curva.

12.9. Esercizio. *Determinare l'insieme in cui*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

è continua.
Disegnare le linee di livello $f(x,y) = c$.

SOLUZIONE:

La funzione $f(x,y)$ é continua in tutti i punti $(x,y) \neq (x,0)$.

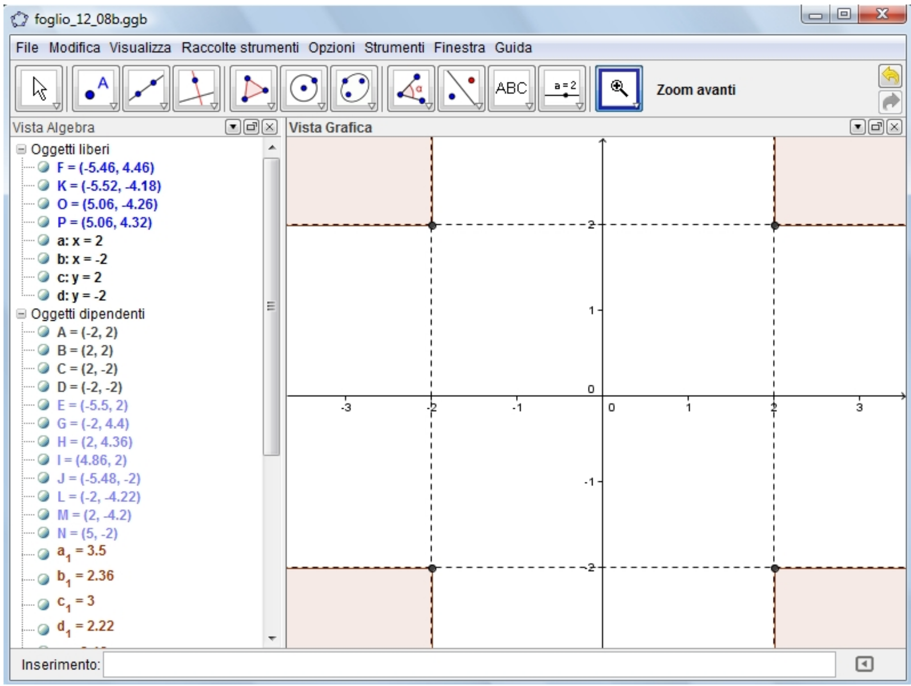

FIGURA 4. $(x^2 - 4) \geq 0 \cup (y^2 - 4 \geq 0)$

Non é continua nell'origine come si riconosce avvicinandosi ad essa lungo le due parabole

$$y = x^2, \qquad y = -x^2$$

lungo le quali la funzione prende costantemente rispettivamente il valore 1 e il valore -1.

Le curve di livello $f(x, y) = c \neq 0$ sono le parabole $y = \frac{1}{c}x^2$.
La curva di livello $f(x, y) = 0$ é l'asse delle ascisse.

12.10. Esercizio. *Data la funzione* $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$

- *determinare l'insieme di definizione di* f*;*
- *calcolare, se esiste,* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$
- *disegnare le linee di livello* $f(x, y) = c$.

SOLUZIONE:

L'insieme di definizione é $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine.
Non esiste il limite nell'origine come si riconosce osservando che

- sull'asse verticale $x = 0$ la funzione vale sempre zero,

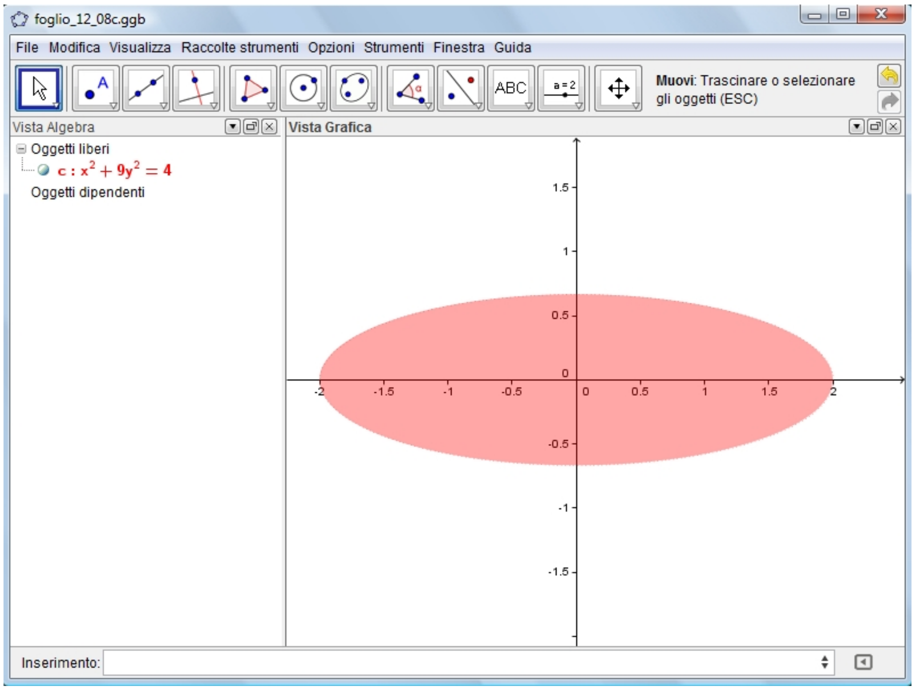

FIGURA 5. $4 - x^2 - 9y^2 > 0$

- sull'asse orizzontale $y = 0$ la funzione vale sempre 1.

Le linee $f(x, y) = c$ sono

$$\frac{x^4}{x^4 + y^2} = c \quad \to \quad x^4 = c(x^4 + y^2) \quad \to \quad (1 - c)x^4 = cy^2$$

Se $c \notin (0, 1)$ le curve di livello sono vuote.

12.11. Esercizio. *Sia*

$$f(x, y) = x^2 y$$

- *Disegnare le linee di livello $\{f(x, y) = c\}$ per $c = 0\,,\ 1\,,\ 2$.*
- *Calcolare le derivate parziali di f nel punto $(2, 1)$ e disegnare il gradiente in tale punto.*
- *Disegnare la direzione del gradiente in almeno quattro punti presi sulla linea di livello $f(x, y) = 2$.*

SOLUZIONE:

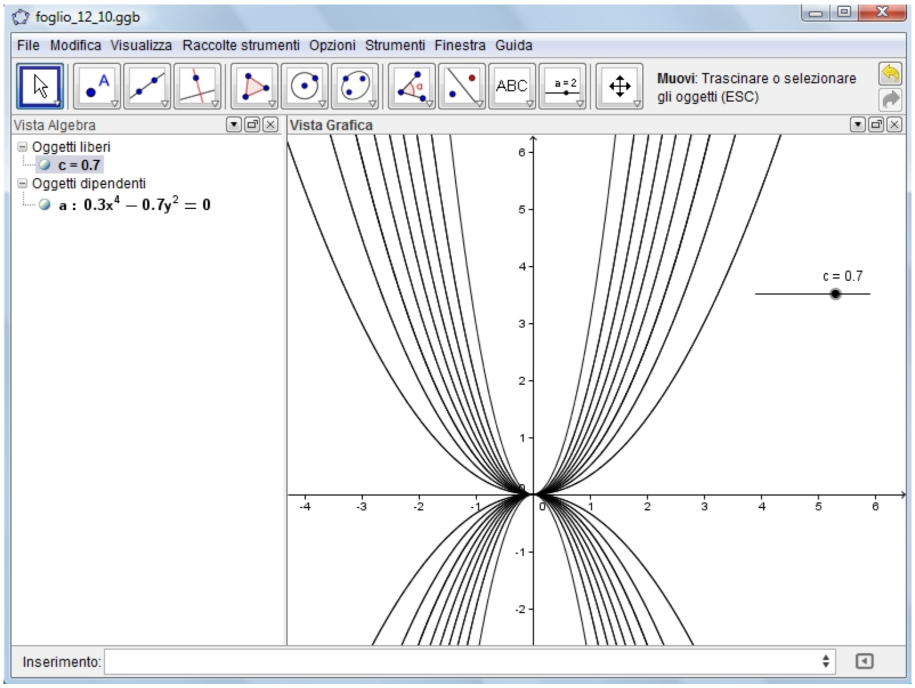

FIGURA 6. $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2} = c$

Le linee di livello

$$f(x,y) = c: \; x^2 y = c \qquad \begin{cases} x^2 y = 0 \\ x^2 y = 1 \\ x^2 y = 2 \end{cases}$$

- la prima linea $c = 0$ é costituita dai due assi $x = 0$ e $y = 0$,
- la seconda linea $c = 1$ é costituita dal grafico di $y = \frac{1}{x^2}$,
- la terza linea $c = 2$ é costituita dal grafico di $y = \frac{2}{x^2}$

Le derivate parziali sono, in ogni punto del piano,

$$f_x(x,y) = 2xy, \quad f_y(x,y) = x^2$$

pertanto nel punto $(2,1)$ riesce

$$f_x(2,1) = 4, \quad f_y(2,1) = 4, \quad \to \quad \vec{\nabla} f(2,1) = \{4,\, 4\}$$

Quattro punti appartenenti alla linea di livello $f(x,y) = 2$, $y = \frac{2}{x^2}$ sono, ad esempio

$$A = (-2, 1/2), \quad B = (-1, 2), \quad C = (1, 2), \quad D = (2, 1/2)$$

i gradienti nei quattro punti sono di conseguenza

$$\vec{\nabla} f(-2, 1/2) = \{-2, 1/4\}, \quad \vec{\nabla} f(-1, 2) = \{-4, 4\},$$

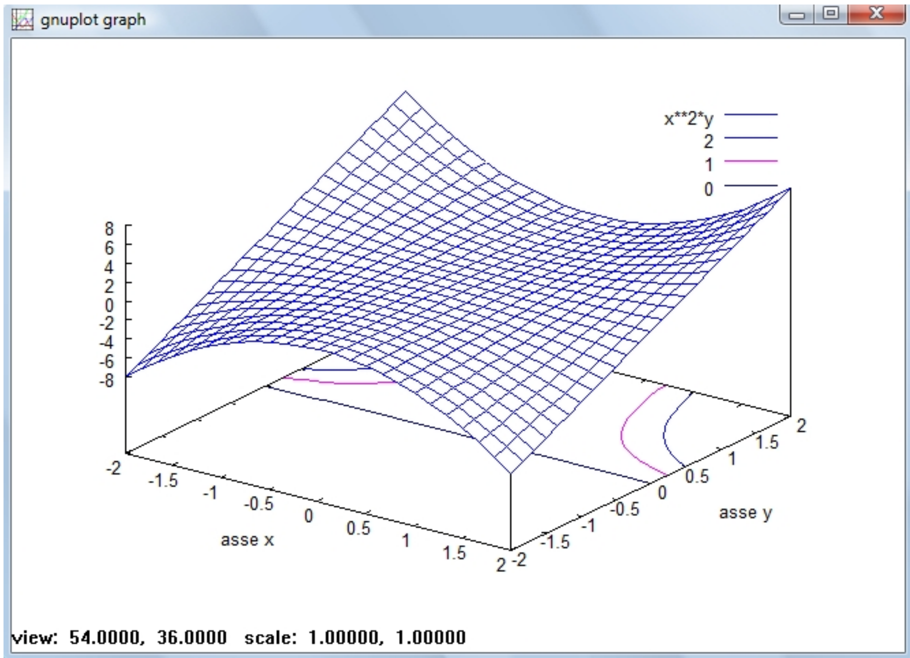

FIGURA 7. $f(x,y) = x^2 y$

$$\vec{\nabla} f(1,2) = \{4,4\}, \quad \vec{\nabla} f(2,1/2) = \{2,1/4\}$$

12.12. Esercizio. *Siano*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3xy + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y, \\ g(x,y) &= 4xy + 4x + 2y^2 - 4y \end{aligned}$$

- *determinare i punti stazionari o critici delle due funzioni,*
- *decidere se le immagini $f(\mathbb{R}^2)$ e $g(\mathbb{R}^2)$ sono insiemi limitati .*

SOLUZIONE:

I punti critici, o stazionari, di una funzione $f(x,y)$ sono i punti in cui il gradiente $\vec{\nabla} f(x,y) = 0$ é nullo, ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x,y) = 3xy + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 3y + 4 - 8x = 0 \\ 3x - 4y - 4 = 0 \end{cases} \quad \to \quad \left(\frac{4}{23}, \frac{-20}{23}\right)$$

$$\boxed{g(x,y) = 4xy + 4x + 2y^2 - 4y}$$

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 4y + 4 = 0 \\ 4x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \quad \to \quad (2,-1)$$

L'insieme dei valori $f(\mathbb{R}^2)$ non é limitato: basta considerare che i include i valori relativi ai punti $(x, 0)$

$$f(x,0) = 4x - 4x^2$$

insieme di valori che, é al variare di $x \in \mathbb{R}$, é chiaramente illimitato. Analogo discorso per $g(\mathbb{R}^2)$ non limitato in quanto include i valori relativi ai punti $(x, 0)$

$$g(x,0) = 4x$$

insieme di valori che, é al variare di $x \in \mathbb{R}$, é chiaramente illimitato.

12.13. Esercizio. *Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia f definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y) & x+y < 0, \\ ax + by + c & x + y \geq 0 \end{cases}$$

Per quali a, b, c la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?

SOLUZIONE:

I valori di f sui punti della retta $x + y = 0$ sono

$$ax - bx + c$$

Il limite di f fatto dal semipiano inferiore di tale retta vale $\sin(0) = 0$ pertanto la funzione é continua se e solo se

$$a = b, \quad c = 0$$

12.14. Esercizio. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- *dire se è continua;*
- *calcolare le derivate parziali nei punti $(x,y) \neq (0,0)$;*
- *calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali nel punto $(0,0)$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

L'addendo
$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$
ha limite 0 per $(x,y) \to (0,0)$ come si riconosce esprimendolo in coordinate polari
$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\rho \cos^2(\theta)\sin(\theta)\right| \leq \rho$$
quindi la funzione $f(x,y)$ é continua anche nell'origine, e quindi in tutto $\mathbb{R}^2$.
Tenuto presente che
$$f(x,0) = f(0,y) = 1$$
riesce ovviamente
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$
da cui
$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

12.15. Esercizio. *Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f definita da*
$$f(x,y) = \begin{cases} a(x^2+y^2)+b & \text{se} \quad x^2+y^2 < 1 \\ \\ (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- *Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?*
- *Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$?*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Gli unici punti in cui la f puó essere discontinua sono quelli della circonferenza $x^2+y^2=1$ sui quali la f é nulla. Quindi anche il limite in ciascuno di tali punti, dall'interno del cerchio, deve essere nullo: quindi
$$a+b=0$$
é la condizione di continuitá per f.

Per quanto riguarda la derivata parziale $f_x(1,0)$ il rapporto incrementale da studiare é
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \begin{cases} h<0 & \to & \dfrac{a[(1+h)^2-1]}{h} \\ h>0 & \to & \dfrac{(1+h)^2}{h} \end{cases}$$
I due limiti sono uguali se e solo se $a=1$.

Per quanto riguarda la derivata parziale $f_y(1,0)$ il rapporto incrementale da studiare é

$$\frac{f(1,h)-f(1,0)}{h}=\frac{(\sqrt{1+h^2}-1)^2}{h}$$

che ha limite zero indipendentemente da a.

12.16. Esercizio. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

dimostrare che

- f *non è continua in* $(0,0)$*;*
- f *ammette le derivate parziali* f_x *e* f_y *in* $(0,0)$*.*

SOLUZIONE:

La funzione $f(x,y)$ é nulla sugli assi $x=0$ e $y=0$ mentre sulla curva $x=y^2$ prende il valore

$$\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

quindi non esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$.
Tenuto conto che $f(0,y)\equiv 0,\ f(x,0)\equiv 0$ si riconosce che

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

Osservazione 12.1. *L'esempio precedente mostra un fenomeno in atteso: una funzione di due variabili puó essere*

- *non continua in un punto* (x_0,y_0)*,*
- *e avere in tale punto* (x_0,y_0) *le derivate parziali.*

Il fenomeno si accetta ricordando che le derivate parziali si riferiscono a rapporti incrementali relativi a tale punto (x_0,y_0)

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}, \quad \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

che riguardano il comportamento della funzione su due sole direzioni privilegiate, quella orizzontale e quella verticale.
Direzioni sulle quali la funzione puó essere regolarissima (nel caso precedente addirittura costante) senza avere alcuna regolaritá sulle tante altre direzioni.

12.17. Esercizio. Calcolare i seguenti integrali curvilinei lungo la curva γ:

$$\int_\gamma x^7 ds, \qquad \gamma: \; y = x^5, \; 0 \le x \le 2m$$

$$\int_\gamma (2 + x^2 y)\, ds, \quad \gamma: \; x^2 + y^2 = 1, \; y \ge 0$$

$$\int_\gamma y\, ds, \qquad \gamma: \; x = t^2, \; y = t, \; 0 \le t \le 2$$

$$\int_\gamma \frac{y}{x}\, ds, \qquad \gamma: \; x = t^4, \; y = t^3, \; \frac{1}{2} \le t \le 1$$

$$\int_\gamma x y^4\, ds, \qquad \gamma: \; x^2 + y^2 = 16, \; x \ge 0$$

SOLUZIONE:

L'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$$

si calcola tramite la rappresentazione parametrica

$$\mathcal{C}: \quad x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t), \quad t \in [a, b]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

Pertanto:

$$\boxed{\int_\gamma x^7 ds, \quad \gamma: \; y = x^5, \; 0 \le x \le 2m}$$

$$\int_\gamma x^7 ds = \int_0^{2m} x^7 \sqrt{1 + (5x^4)^2} dx = \frac{1}{25} \frac{2}{3} (1 + 25x^8) \sqrt{1 + 25x^8} \Big|_0^{2m}$$

$$\boxed{\int_\gamma (2 + x^2 y)\, ds, \quad \gamma: \; x^2 + y^2 = 1, \; y \ge 0}$$

La rappresentazione parametrica é $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [0, \pi]$ pertanto

$$\int_\gamma (2+x^2y)\,ds = \int_0^\pi \left(2+\cos^2(t)\sin(t)\right)\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}dt =$$
$$= \int_0^\pi \left(2+\cos^2(t)\sin(t)\right)dt = 2\pi$$

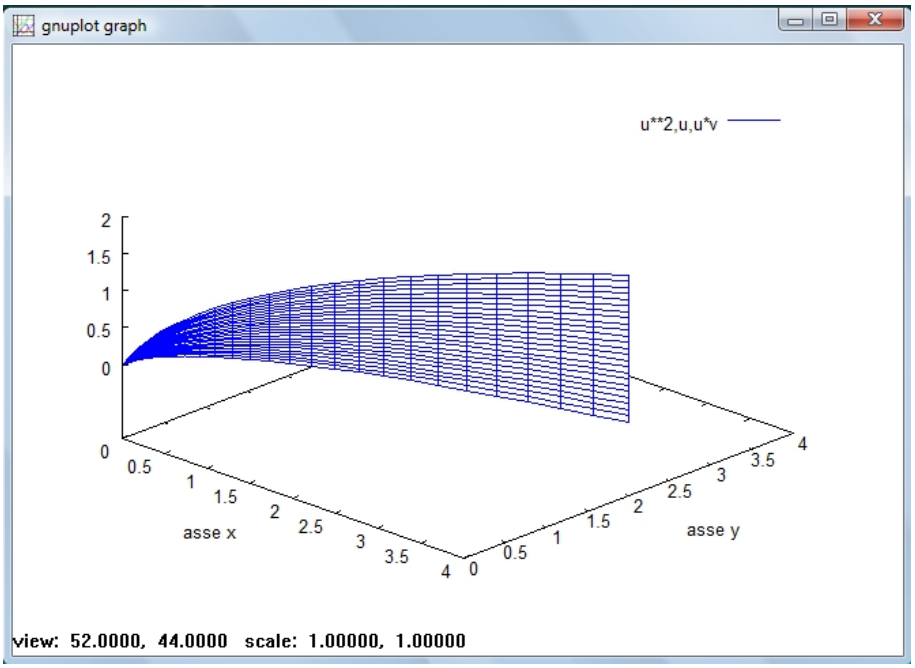

FIGURA 8. $\int_\gamma y\,ds, \quad \gamma:\ x=t^2,\ y=t,\ 0\le t\le 2$

$$\boxed{\int_\gamma y\,ds, \quad \gamma:\ x=t^2,\ y=t,\ 0\le t\le 2}$$

$$\int_\gamma y\,ds = \int_0^2 t\sqrt{4t^2+1}dt = \frac{1}{8}\frac{2}{3}(4t^2+1)\sqrt{4t^2+1}\Big|_0^2 = \frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1) \approx 5.7$$

La figura 8 indica il significato geometrico dell'integrale curvilineo proposto: il valore approssimativo 5.7 trovato rappresenta l'area del muro costruito sul piano (x,y) sui punti della parabola $x=y^2$ per $x\in[0,2]$ e di altezza in ciascun punto (x,y) pari all'ordinata stessa y.

$$\boxed{\int_\gamma \frac{y}{x}\,ds, \quad \gamma:\ x=t^4,\ y=t^3,\ \frac{1}{2}\le t\le 1}$$

$$\int_\gamma \frac{y}{x}\,ds = \int_{1/2}^{1} t\sqrt{16t^2+9}dt = \frac{1}{32}\frac{2}{3}(16t^2+9)\sqrt{16t^2+9}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$\boxed{\int_\gamma xy^4\,ds, \quad \gamma : \, x^2+y^2=16, \, x \geq 0}$$

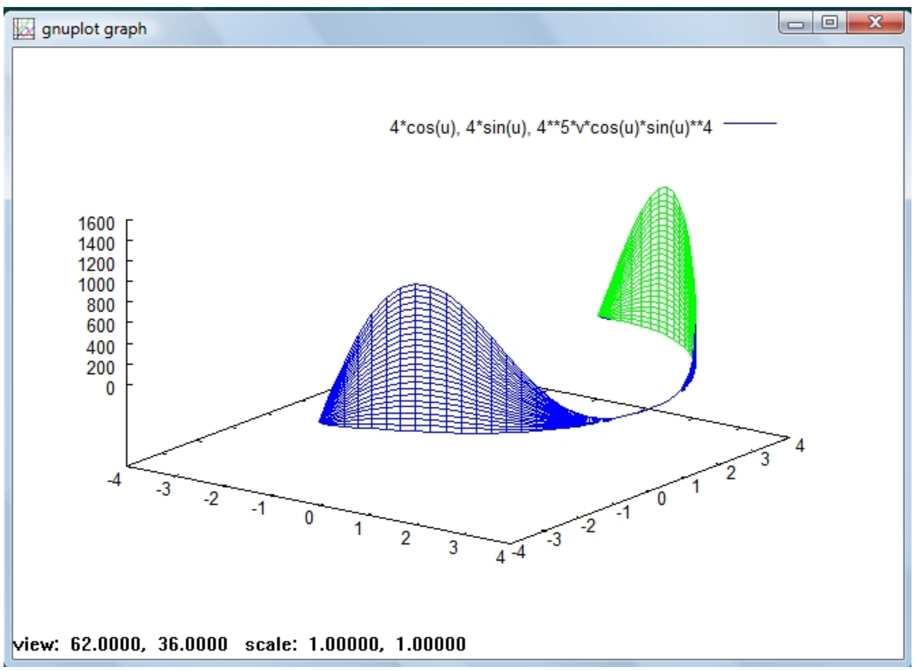

Figura 9. $\int_\gamma xy^4\,ds, \quad \gamma : \, x^2+y^2=16, \, x \geq 0$

$$\int_\gamma xy^4\,ds = 4^6\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\sin^4(t)\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}dt = 4^6\frac{2}{5}$$

La figura 9 indica il significato geometrico dell'integrale curvilineo proposto: si tratta dell'area di un muro costruito sulla semicirconferenza circonferenza di centro l'origine e raggio 4 alto in ogni punto (x, y), $x \geq 0$ il valore xy^4.