ANALISI

Soluzione esercizi

9 dicembre 2011

9.1. Esercizio.
Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}\,x)| & \text{se } |x| < 1 \\ a & \text{se } |x| = 1 \\ b\,x^2 + c & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

- *determinare* a, b *e* c *in modo che* f *sia continua in* $\mathbb{R}$,
- *determinare* a, b *e* c *in modo che* f *sia anche derivabile in* $\mathbb{R}$

SOLUZIONE:

Tenuto conto che la funzione assegnata é pari basta controllare per quali valori di a, b, c la funzione sia continua e/o derivabile in $x = 1$.
É utile osservare anche che

$$\forall x : \quad \left| x \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| = x \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Continuitá:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a = \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad \to \quad b + c = a = 1$$

Derivabilitá:
Tenuto conto che

$$\lim_{x\to 1} \left(x \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)' = \lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\tfrac{\pi x}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\pi x \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 1} (bx^2 + c)' = \lim_{x\to 1} 2bx = 2b$$

$f(x)$ é derivabile in $x = 1$ se e solo se

$$1 + \frac{\pi}{2} = 2b$$

Pertanto $f(x)$ é continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad c = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

9.2. Esercizio.
Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^2 - 2x + 2}$$

- *determinare l'insieme di definizione,*
- *determinare i limiti per $x \to \pm\infty$*
- *determinare il grafico.*

SOLUZIONE:

Tenuto conto che $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x-1)^2 + 1} = \frac{|x-1|}{|x-1|^2 + 1}$$

Il denominatore non si annulla mai, quindi la funzione é definita in tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre riesce $f(x) \geq 0$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x-1|}{|x-1|^2 + 1} = 0$$

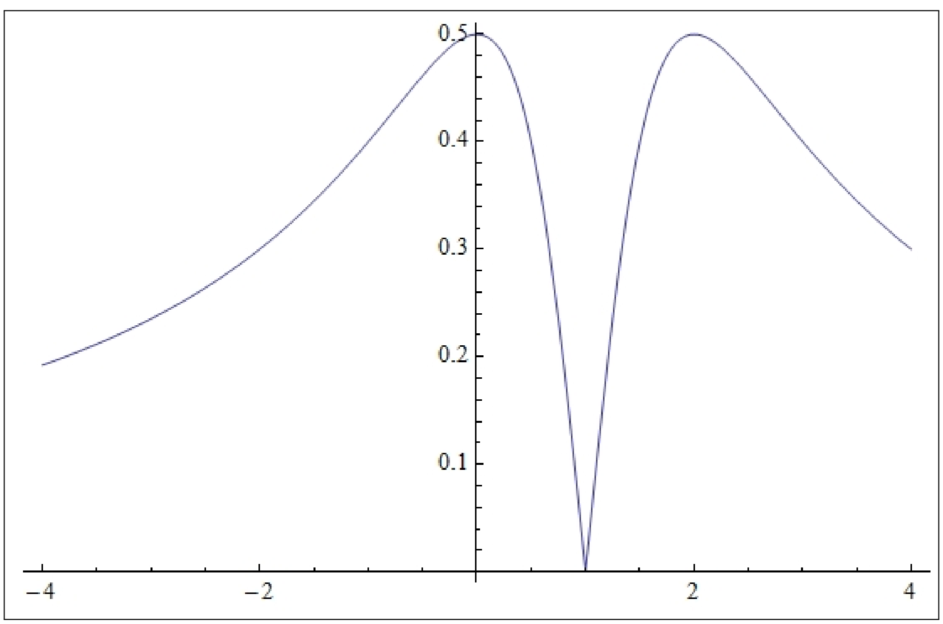

FIGURA 1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^2 - 2x + 2}$

La funzione é simmetrica rispetto ad $x = 1$, cioé $f(1 + h) = f(1 - h)$: basta pertanto determinarne il grafico per $x \geq 1$

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2+1} \quad \to \quad f'(x) = \frac{1-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+1\right)^2}$$

Da cui, limitatamente alla semiretta $x > 1$, $f'(x)$ é positiva in $(1,2)$ e negativa dopo: quindi $f(x)$ é crescente in $(1,2)$ e decrescente dopo.
Tenuto presente che

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1/2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

si riconosce, vedi figura 1, che

$$minimo = 0 = f(1), \quad massimo = f(2) = \frac{1}{2}$$

Nel punto $x = 1$ la funzione non é derivabile.

9.3. Esercizio.
Assegnata la funzione $f(x) = e^{-x^2}|1-x^2|$

- *determinare i limiti per* $x \to \pm\infty$
- *calcolare il minimo,*
- *determinare i punti di massimo o di minimo relativi,*
- *calcolare l'immagine di* f.

Soluzione:

La funzione assegnata é pari, cioé é simmetrica rispetto a $x = 0$ cioé $f(x) = f(-x)$.
Basta quindi studiarla per $x \geq 0$.
Tenuto conto che $f(x) \geq 0$, e tenuto conto che $f(1) = 0$ si riconosce che

$$minimo = 0 = f(1)$$

La nota disuguaglianza

$$\forall t > 0: \;\; e^t \geq 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots \frac{1}{n!}t^n \geq 1 + \frac{1}{n!}t^n$$

implica

$$e^{x^2} \geq 1 + \frac{1}{2!}x^4 \quad \to \quad e^{-x^2}|1-x^2| = \frac{|1-x^2|}{e^{x^2}} \leq \frac{x^2}{1+\dfrac{1}{2!}x^4}$$

da cui

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

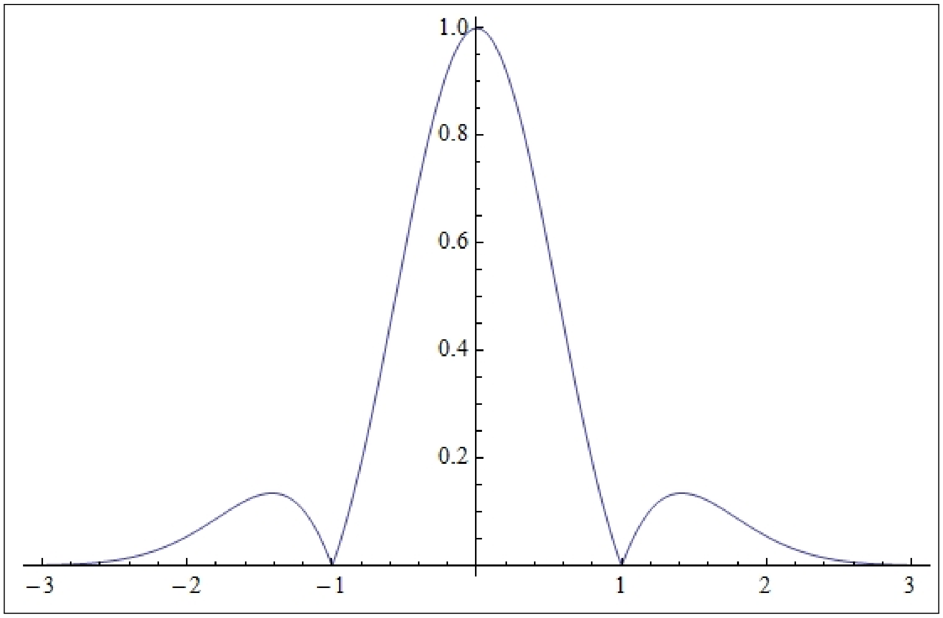

FIGURA 2. $f(x) = e^{-x^2}|1-x^2|$

$$\begin{array}{lllll}
x \in (0,1) & \to f(x) = e^{-x^2}(1-x^2) & \to f'(x) = -2xe^{-x^2}(2-x^2) & \to f'(x) < 0 & f(x) \searrow \\
x \in (1,\sqrt{2}) & \to f(x) = e^{-x^2}(x^2-1) & \to f'(x) = 2xe^{-x^2}(2-x^2) & \to f'(x) > 0 & f(x) \nearrow \\
x > \sqrt{2} & \to f(x) = e^{-x^2}(x^2-1) & \to f'(x) = 2xe^{-x^2}(2-x^2) & \to f'(x) < 0 & f(x) \searrow
\end{array}$$

Riesce quindi

$$massimo = e^{-1/2} = f(\pm\sqrt{2})$$

9.4. Esercizio.

Sia

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$$

- *determinare l'insieme di definizione ed eventuali asintoti,*
- *determinare gli intervalli in cui f é crescente e quelli in cui é decrescente,*
- *determinare gli intervalli di concavità e convessità,*
- *disegnare il grafico di f.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La divisione fra polinomi permette di riconoscere che

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1} = x+3+\frac{3}{x-1}$$

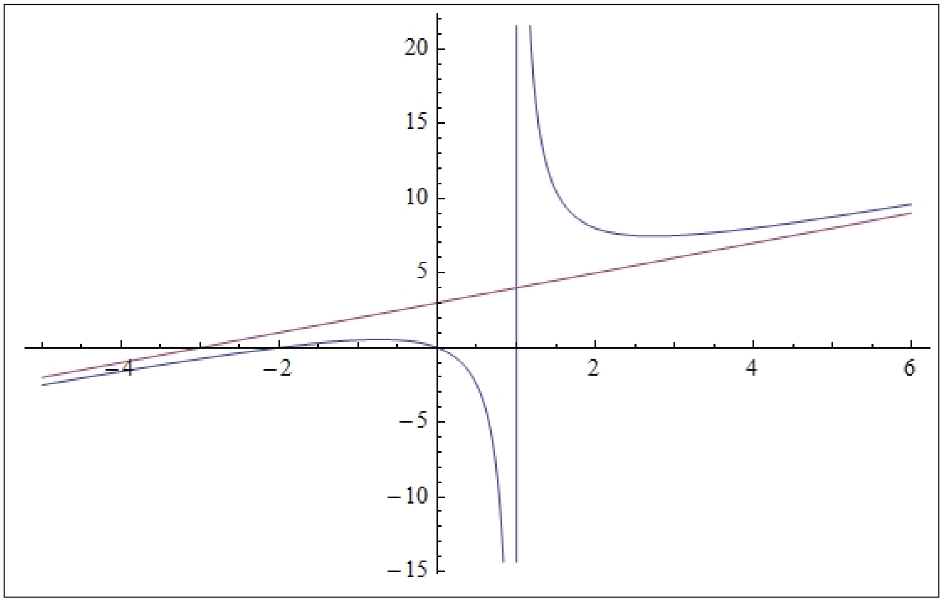

FIGURA 3. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$

Si riconosce pertanto che la funzione é definita per $x \neq 1$ e che possiede l'asintoto obliquo $y = x + 3$.

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-1)^2} \quad \to \quad \begin{cases} f'(x) > 0 & |x-1| > \sqrt{3} \\ f'(x) < 0 & |x-1| < \sqrt{3} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{array}{llllll} x < 1-\sqrt{3} & \to & f'(x) > 0 & \to & f(x) & \nearrow \\ x \in (1-\sqrt{3}, 1) & \to & f'(x) < 0 & \to & f(x) & \searrow \\ x \in (1, 1+\sqrt{3}) & \to & f'(x) < 0 & \to & f(x) & \searrow \\ x > 1+\sqrt{3} & \to & f'(x) > 0 & \to & f(x) & \nearrow \end{array}$$

Tenuto conto che

$$\forall x \neq 1 : \quad f''(x) = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

si riconosce che $f(x)$ é concava per $x < 1$, convessa per $x > 1$.
I punti $x_M = 1 - \sqrt{3}$ e $x_m = 1 + \sqrt{3}$ sono punti rispettivamente di massimo e di minimo relativo.

9.5. Esercizio. *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\log(1+x)}{e^x - x\cos x - 1} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x - \sin(x^2)}{x^2(e^{x^2} - 1)}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x\,\log(1+x)}{\mathrm{e}^x - x\cos x - 1}}$$

Prepariamo i polinomi di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ per i vari termini che compaiono nell'espressione:

$$\begin{array}{lll}
\log(1+x) & \hookrightarrow x - \frac{x^2}{2} & \to \quad x\log(1+x) \hookrightarrow x^2 - \frac{x^3}{2} \\
e^x & \hookrightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} & \\
\cos(x) & \hookrightarrow 1 - \frac{x^2}{2} & \to \quad x\cos(x) \hookrightarrow x - \frac{x^3}{2} \\
e^x - x\cos(x) - 1 & \hookrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} &
\end{array}$$

Ne segue

$$\frac{x\,\log(1+x)}{\mathrm{e}^x - x\cos x - 1} = \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^2)}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^2)} = 2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x) - \sin(x^2)}{x^2(e^{x^2} - 1)}}$$

Con la stessa tecnica precedente:

$$\begin{array}{lll}
\cos(x) & = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) & \to \quad x^2\cos(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5) \\
\sin(x) & = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) & \to \quad \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^8) \\
x^2\cos(x) - \sin(x^2) & = -\frac{x^4}{2} + o(x^5) + \frac{x^6}{3!} - o(x^8) & \\
e^x - 1 & = x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) & \to \quad x^2\left(e^{x^2} - 1\right) = x^4 + \frac{x^6}{2} + o(x^8)
\end{array}$$

Semplificando riesce

$$x^2\cos(x) - \sin(x^2) = -\frac{x^4}{2} + o(x^5), \quad x^2\left(e^{x^2} - 1\right) = x^4 + o(x^5)$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x) - \sin(x^2)}{x^2(e^{x^2} - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^5)}{x^4 + o(x^5)} = -\frac{1}{2}$$

9.6. Esercizio. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3-3x^2}-1+x^2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x^2+x^4}-1+x^2}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)-\sin^2(x)}{1-\cos(x^2)}$$

SOLUZIONE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3-3x^2}-1+x^2}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x^2+x^4}-1+x^2}{x^4} = -\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)-\sin^2(x)}{1-\cos(x^2)} = \frac{2}{3}$$

9.7. Esercizio.

- Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie é assolutamente convergente
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k}\left(\frac{x}{x+1}\right)^k$$

- Determinare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+1)}$

SOLUZIONE:

$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k}\left(\frac{x}{x+1}\right)^k}$

Perché la serie sia assolutamente convergente occorre che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\left|3\frac{x}{x+1}\right|^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$$

ovvero

$$\left|\frac{1}{1+x}-1\right| < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+1)}}$$

Tenuto presente che

$$\frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

le somme parziali S_n sono

$$\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right\} + \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right\} \dots \left\{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right\}$$

che semplificando portano a

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$$

da cui

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

9.8. Esercizio.

- *Determinare per quali x la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k+1}\, x^k$ *é assolutamente convergente*
- *Determinare la somma della serie* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (1+x)^k$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1}\, x^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1$$

$$|1+x| < 1 \quad \to \quad \sum_{k=2}^{\infty} (1+x)^k = -\frac{(1+x)^2}{x}$$

9.9. Esercizio.

- *Stabilire il comportamento della serie*

  $$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(e^{1/k^\alpha} - 1\right)$$

  al variare di $\alpha > 0$.

- *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)$$

Soluzione:

Tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \to \quad x \in (0,\delta): \; \frac{1}{2}x \le e^x - 1 \le \frac{3}{2}x$$

si riconosce che

$$\forall k \ge K_0: \; \frac{1}{2}\frac{1}{k^\alpha} \le e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1 \le \frac{3}{2}\frac{1}{k^\alpha}$$

da cui

$$\forall k \ge K_0: \; \frac{1}{2}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \le k\left(e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1\right) \le \frac{3}{2}\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Disuguaglianza che implica che la serie sia convergente se e solo se $\alpha > 2$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{4}{5}$$

9.10. Esercizio.
Data la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$

- *scrivere il polinomio di Taylor $T_2(x)$ di centro $x_0 = 0$ e ordine 2 e il resto $R_2(x)$ nella forma di Lagrange;*
- *calcolare $f(\frac{1}{10})$ con un errore minore di 10^{-2}.*

Soluzione:

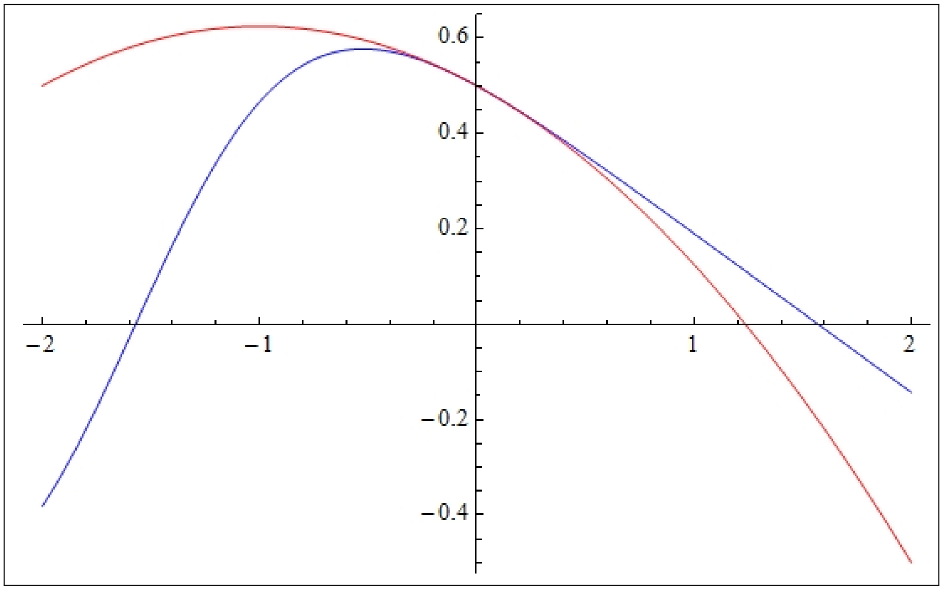

FIGURA 4. $f(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ in blu e $T_2(x)$ in rosso

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+2} \\ f'(x) &= -\dfrac{2\sin(x)+1}{(\sin(x)+2)^2} \\ f''(x) &= \dfrac{2(\sin(x)-1)\cos(x)}{(\sin(x)+2)^3} \\ f'''(x) &= -\dfrac{(\sin(x)-1)(10\sin(x)+\cos(2x)+9)}{(\sin(x)+2)^4} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(0) &= \dfrac{1}{2} \\ f'(0) &= \dfrac{1}{4} \\ f''(0) &= -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

da cui

$$T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2$$

L'espressione di Lagrange del resto é

$$R_2(x) = -\frac{1}{3!}\frac{(\sin(\xi)-1)(10\sin(\xi)+\cos(2\xi)+9)}{(\sin(\xi)+2)^4}x^3$$

Le note stime del modulo di $\sin(t)$ e $\cos(t)$ permettono quindi di riconoscere la disuguaglianza

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{3!}\frac{2(10+1+9)}{1^4}|x|^3 = \frac{20}{3}|x|^3$$

Riesce pertanto

$$\left|f(\frac{1}{10}) - T_2(\frac{1}{10})\right| \le \frac{20}{3}10^{-3} < 10^{-2}$$

9.11. Esercizio.

Assegnata la funzione $f(x) = \log(1+x)$

- *calcolare i polinomi di Taylor* $T_1(x)$ *e* $T_2(x)$ *di punto iniziale* $x_0 = 0$ *e ordini* 1 *e* 2
- *provare che riesce* $\forall x \in [0,1]: \ T_2(x) \le f(x) \le T_1(x)$.

SOLUZIONE:

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$$

Per provare la disuguaglianza richiesta:

- $\log(1+x) \le x$ si ricava dal fatto che la $y = x$ é tangente al grafico in corrispondenza dell'origine e la funzione $\log(1+x)$ é concava,
- posto $d(x) = \log(1+x) - x + x^2/2$ é facile riconoscere che $d(0) = 0$ e che per $x \in [0,1]$ riesce $d'(x) \ge 0$, per cui

$$\forall x \in [0,1]: \ 0 = d(0) \le d(x) \quad \to \quad T_2(x) \le \log(1+x)$$

9.12. Esercizio.

Assegnata la funzione

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare l'immagine di* f,
- *determinare il polinomio di Taylor* $T_3(x)$ *di punto iniziale* $x_0 = \pi/2$ *e ordine* 3,
- *calcolare* $f(\pi/2 + \frac{1}{10})$ *con un errore minore di* 10^{-3}.

SOLUZIONE:

I punti di massimo o minimo di $f(x)$ sono punti in cui si annulla la derivata prima

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x) \quad \to \quad f'(x) = 0 \quad \to \quad x_1 = \pi/4, \ x_2 = \pi + \pi/4, \ldots$$

Quindi

$$massimo = f(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad minimo = f(\pi + \pi/4) = -\sqrt{2}$$

L'immagine di f é pertanto l'intervallo

$$\left[-\sqrt{2}, \ \sqrt{2}\right]$$

$$\begin{cases} f(x) & = \sin(x) + \cos(x) \\ f'(x) & = \cos(x) - \sin(x) \\ f''(x) & = -\sin(x) - \cos(x) \\ f'''(x) & = -\cos(x) + \sin(x) \\ f^{[4]}(x) & = \sin(x) + \cos(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(\pi/2) & = 1 \\ f'(\pi/2) & = -1 \\ f''(\pi/2) & = -1 \\ f'''(\pi/2) & = 1 \end{cases}$$

da cui segue

$$T_3(x) = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

Il resto é pertanto

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}\left[\sin(x) + \cos(x)\right]\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

Le note maggiorazioni di $|\sin(t)|$ e $|\cos(t)|$ consentono di riconoscere che

$$\left|f(\pi/2 + \frac{1}{10}) - T_3(\pi/2 + \frac{1}{10})\right| = \left|R_3(\pi/2 + \frac{1}{10})\right| \leq \frac{2}{4!}10^{-4}$$

9.13. Esercizio.
Assegnata la funzione

$$f(x) = e^x + 4e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare l'immagine di f,*
- *determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni, ha una soluzione, ha due soluzioni,*
- *determinare in quanti punti la tangente al grafico di f é parallela alla retta $y = 3x$*

Soluzione:

L'immagine di f é un intervallo determinato dall'*inf* e dal *sup* di f:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \quad \rightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$$

Per determinare il minimo

$$f'(x) = e^x - 4e^{-x} : \ f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{2x} = 4 \quad \rightarrow \quad e^x = 2 \quad \rightarrow \quad x = \log(2)$$

Ne segue

$$minimo = f(\log(2)) = 4$$

L'immagine di f é pertanto l'intervallo $[4, +\infty)$.

Tenuto conto che

$$\begin{cases} x < \log(2) & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \searrow \\ x > \log(2) & \rightarrow & f'(x) > 0 & \rightarrow & f(x) \nearrow \end{cases}$$

si riconosce che il grafico di $f(x)$ somiglia a quello di una parabola con la concavitá rivolta verso l'alto e il vertice nel punto $V = (\log(2), 4)$.

Pertanto l'equazione $f(x) = k$:

- non ha soluzioni se $k < 4$
- ha una sola soluzione se $k = 4$
- ha due soluzioni se $k > 4$.

Osservazione 9.1. *La funzione*

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

simmetrica rispetto all'origine ha il nome di coseno iperbolico *e il suo grafico, simile a quello di una parabola, ha il nome di catenaria.*

9.14. Esercizio.

Sia $f(x) = xe^{-x^2}$

- *Determinare i limiti per* $x \to \pm\infty$,
- *determinare l'immagine di* f,
- *determinare per quali* $k \in \mathbb{R}$ *l'equazione* $f(x) = k$ *non ha radici, ne ha una o ne ha piú di una.*

SOLUZIONE:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) \quad \to \quad \begin{cases} f'(x) > 0 & -1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2} \\ f'(x) < 0 & 2x^2 > 1 \end{cases}$$

I punti

$$x_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

sono punti di massimo e di minimo:

$$minimo = -\frac{1}{\sqrt{2e}} = f(-1/\sqrt{2}), \quad massimo = \frac{1}{\sqrt{2e}} = f(1/\sqrt{2})$$

L'immagine é pertanto l'intervallo chiuso e limitato

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$$

L'equazione $f(x) = k$ pertanto

- non ha radici se $|k| > \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

- ha una sola radice se $|k| = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$
- ha due radici se $0 < |k| < \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$
- ha una sola radice se $k = 0$.

9.15. Esercizio.

Sia $f(x) = 2x + \sin(2x), \quad x \in [0, \pi]$

- *verificare che* $f(x)$ *é monotona,*
- *determinare il dominio della sua inversa* f^{-1}
- *determinare la derivata della funzione inversa nei punti*

$$y_1 = \pi, \quad y_2 = 2\pi$$

Soluzione:

$$f'(x) = 2(1 + \cos(2x)) : \ \forall x : \ f'(x) \geq 0, f'(\pi/2) = 0$$

$f(x)$ risulta pertanto strettamente crescente in $[0, \pi]$, quindi dotata di inversa.

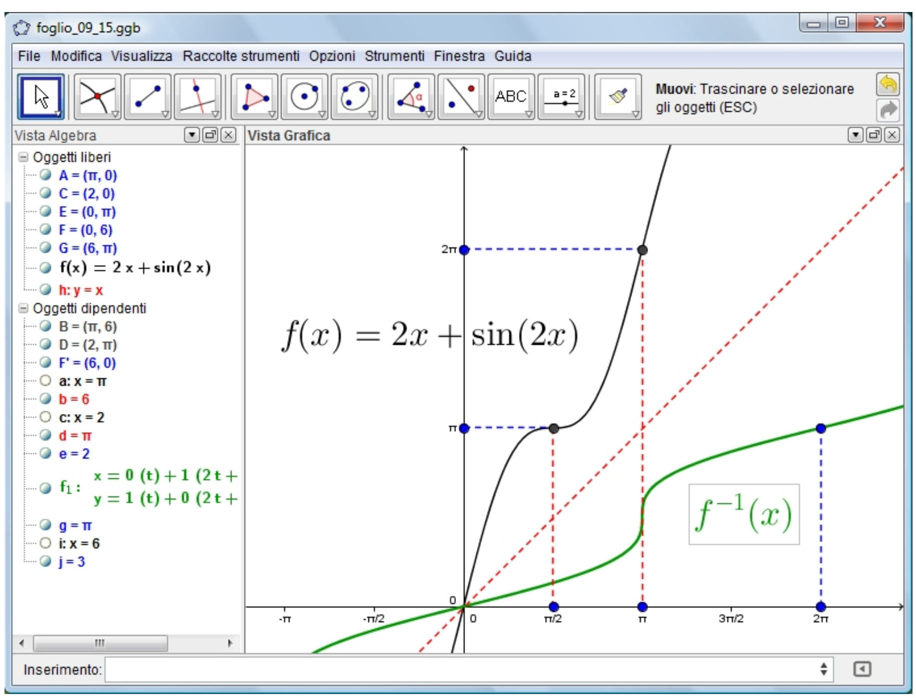

Figura 5. $f(x)$ e la sua inversa.

Tenuto conto che

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

si riconosce che

$$f^{-1}(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad f^{-1}(2\pi) = \pi$$

Osservato che

$$f'(\pi/2) = 0, \quad f'(\pi) = 4$$

si riconosce, vedi figura 5, che la funzione inversa non é derivabile in y_1 mentre é derivabile in y_2 e riesce

$$\big(f^{-1}(2\pi)\big)' = \frac{1}{f'[f^{-1}(2\pi)]} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{4}$$