ANALISI

Soluzione esercizi

25 novembre 2011

8.1. Esercizio. *Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei corrispondenti intervalli:*

$$2\,x^4 - x \text{ in } [0,1]; \qquad \mathrm{e}^{-x^2} \text{ in } [-2,2]$$

$$\cos|x| - |\cos x| \text{ in } [-2\pi, 2\pi]; \qquad \cos x + |\sin x| \text{ in } [-\pi/2, \pi/2]$$

SOLUZIONE:

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ ammette massimo e minimo: esistono cioé punti x_m, x_M appartenenti all'intervallo tali che

$$\forall x \in [a,b]: \;\; minimo = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = massimo$$

I punti x_m, x_M vanno cercati:

- agli estremi dell'intervallo,
- nei punti interni all'intervallo in cui riesce $f'(x) = 0$,
- nei punti dell'intervallo in cui la funzione non é derivabile.

$$\boxed{f(x) = 2\,x^4 - x, \;\; x \in [0,1]}$$

- $f(0) = 0,\; f(1) = 0$
- $f'(x) = 8x^3 - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{1}{2}, f(1/2) = -1/4$
- non ci sono punti in cui la funzione non é derivabile.

$minimo = f(1/2) = -3/8, \quad massimo = f(0) = 0$

$$\boxed{f(x) = e^{-x^2}, \;\; x \in [-2,2]}$$

- $f(-2) = f(2) = e^{-4}$
- $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \quad \to \quad x = 0, \;\; f(0) = 1$
- non ci sono punti in cui la funzione non é derivabile.

$minimo = f(2) = e^{-4}, \quad massimo = f(0) = 1$

$$\boxed{f(x) = \cos|x| - |\cos x|, \;\; x \in [-2\pi, 2\pi]}$$

- $f(-2\pi) = 0, \;\; f(2\pi) = 0$

- $x \in [0, 2\pi] \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad f(x) = \cos(x) - |\cos(x)| = \begin{cases} 2\cos(x) & x \in [\pi/2, 3\pi/2] \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & x \in [\pi/2, 3\pi/2] \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 \ x = \pi$$

- $minimo = f(\pi) = -2, \quad massimo = f(0) = 0$

$\boxed{f(x) = \cos(x) + |\sin x|, \ \ x \in [-\pi/2, \pi/2]}$

- $f(\pi/2) = 1, \ f(\pi/2) = 1$
- $$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x) - \cos(x) & x \in [-\pi/2, 0] \\ -\sin(x) + \cos(x) & x \in [0, \pi/2] \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\pi/4, \ f(\pm\pi/4) = \sqrt{2}$$

- $minimo = f(\pi/2) = 1, \ massimo = f(\pm\pi/4) = \sqrt{2}$

8.2. Esercizio.

Calcolare gli eventuali estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo delle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato:

$$\begin{array}{ll} 2 - \mathrm{e}^{-x} \text{ in } [0, +\infty); & \log(1 + x^2) \text{ in } \mathbb{R}; \\ \cos(x^2) \text{ in } \mathbb{R}; & \dfrac{1}{1 + x^2 + x^6} \text{ in } [0, +\infty) \end{array}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$\boxed{2 - \mathrm{e}^{-x} \ x \in [0, +\infty)}$

$$massimo = f(0) = 3, \quad inf. = 2 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$\boxed{\log(1 + x^2), \ x \in \mathbb{R}}$

$$minimo = 0 = f(0), \quad sup = +\infty = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

$\boxed{\cos(x^2) \ x \in \mathbb{R}}$

$$minimo = -1 = f(\sqrt{\pi}), \ massimo = 1 = f(0)$$

$\boxed{\dfrac{1}{1 + x^2 + x^6} \ x \in [0, +\infty)}$

$$inf. = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad massimo = 1 = f(0)$$

8.3. Esercizio. *Determinare per quali valori dei parametri a, b, c la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c\,, & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

risulta essere derivabile in tutto l'asse reale. In corrispondenza di questi valori, determinare il massimo e il minimo di f nell'intervallo $[-1, \sqrt{3}]$.

SOLUZIONE:

Per essere continua deve riuscire:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = c = f(0) = a = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

da cui

$$a = c = 1$$

Per essere anche derivabile occorre che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + bh + 1 - 1}{h} = b = \frac{2}{\pi} \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{h}\right) - 1}{h} = -\frac{2}{\pi}$$

da cui

$$b = -\frac{2}{\pi}$$

8.4. Esercizio. *Studiare la convessità delle seguenti funzioni, nell'insieme nel quale sono definite, determinando gli eventuali punti di flesso*

$$x^3(x-1)^2; \quad (|x|-1)^2; \quad x^2(4 - 2\log x).$$

SOLUZIONE:

$\boxed{f(x) = x^3(x-1)^2}$

$$f''(x) = 2x\left(10x^2 - 12x + 3\right), \quad f''(x) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{6-\sqrt{6}}{10} \\ \\ x_3 = \dfrac{6+\sqrt{6}}{10} \end{cases}$$

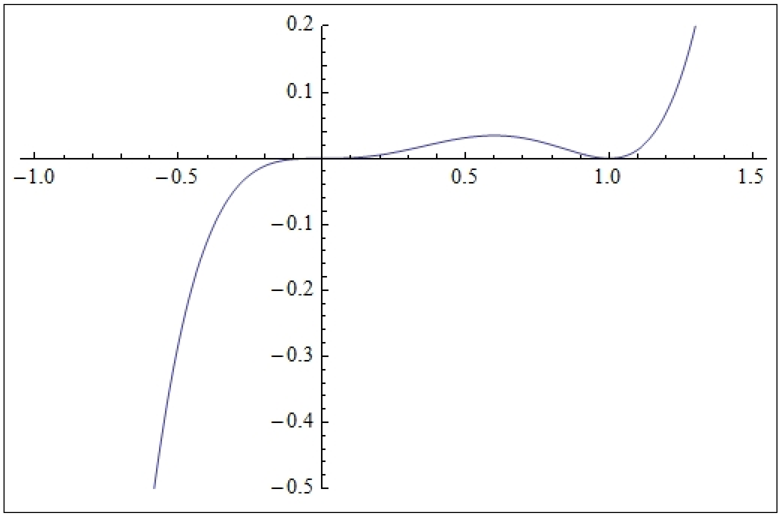

FIGURA 1. $x^3(x-1)^2$

La funzione é quindi convessa per $x \in [x_1, x_2]$ e per $x_3 \leq x$.
I punti x_1, x_2, x_3 sono punti di flesso.

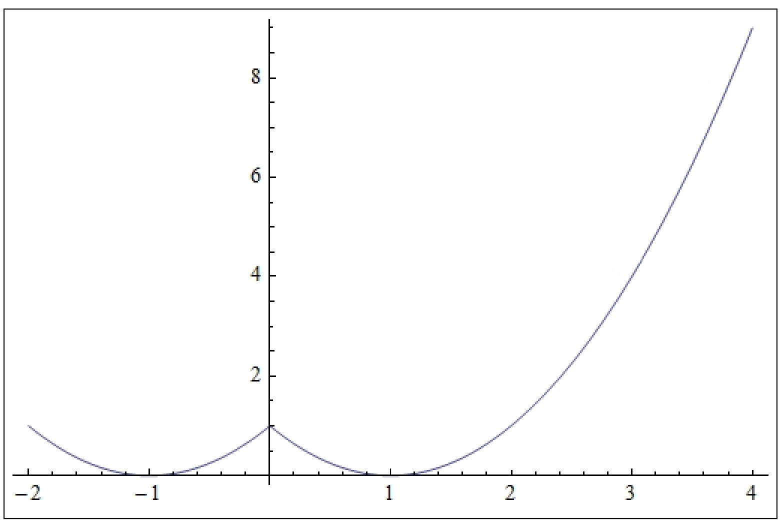

FIGURA 2. $(|x|-1)^2$

$\boxed{g(x) = (|x|-1)^2}$

La funzione $g(x) = x^2 - 2|x| + 1$ non é derivabile in $x = 0$: a sinistra e a destra di zero coincide con due parabole convesse: é quindi convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$. Il grafico, vedi figura 2, fa capire bene cosa succede in $x = 0$.

$$\boxed{u(x) = x^2\,(4 - 2\,\log(x))}$$

$$u''(x) = 2 - 4\log(x): \;\; u''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{e}$$

Pertanto la funzione é convessa per $x \in (0, \sqrt{e})$.
Il punto $\sqrt{e}$ é punto di flesso.

8.5. Esercizio.

- *Determinare il numero di soluzioni dell'equazione*

$$\arctan(x) = x^3 + x$$

(Suggerimento: studiare la funzione $f(x) = \mathrm{arctg}x - x^3 - x$).

- *Dimostrare che*

$$\log x \le x - 1 \qquad \forall x \in (0, +\infty).$$

Soluzione:

$$\boxed{\arctan(x) = x^3 + x}$$

La funzione $f(x) = \arctan(x) - x^3 - x$ ha derivata

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 - 3x^2 < 0, \;\; \forall x \neq 0$$

Quindi $f(x)$ é strettamente decrescente.
Tenuto conto che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

l'equazione $f(x) = 0$, ovvero $\arctan(x) = x^3 + x$, ha una e una sola radice che é, evidentemente $x = 0$

$$\boxed{\log(x) \le x - 1 \;\; \forall x \in (0, +\infty)}$$

Posto

$$g(x) = \log(x) - x + 1$$

riesce

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} g'(x) > 0 & x \in (0,1) \\ g'(x) < 0 & x > 1 \end{cases}$$

$g(x)$ é quindi crescente per $x \in (0,1)$ e decrescente per $x > 1$, e quindi raggiunge in $x = 1$ il valore massimo

$$\forall x \in (0, +\infty): \;\; g(x) \le g(1) = 0 \quad \rightarrow \quad \log(x) \le x - 1$$

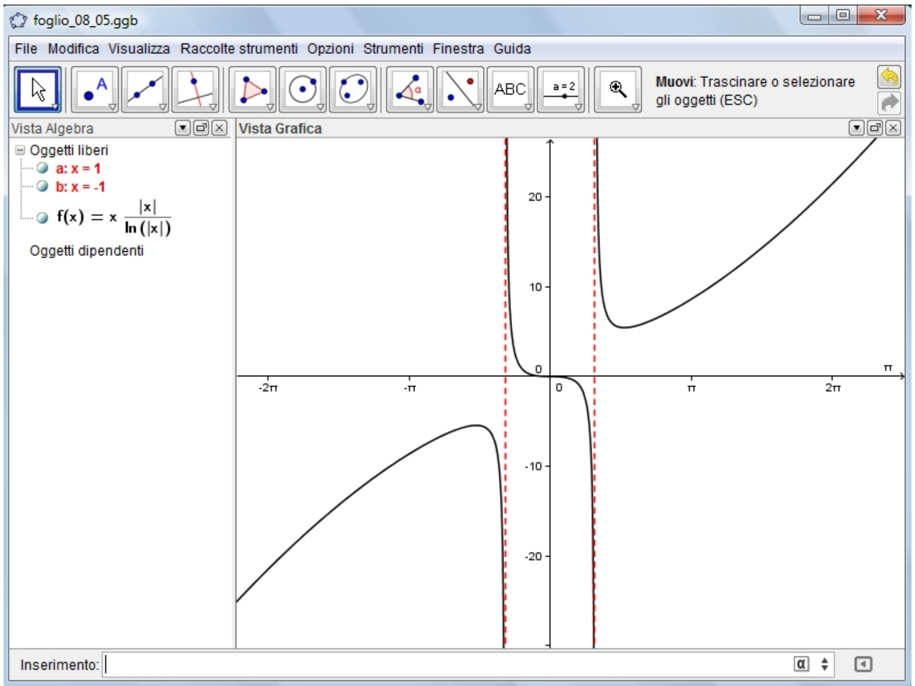

FIGURA 3. $f(x) = \dfrac{x|x|}{\log(|x|)}$

8.6. Esercizio. *Determinare l'insieme di definizione, insieme di continuità, limiti, asintoti, insieme di derivabilità, intervalli di crescenza e decrescenza,intervalli di concavità e convessità della funzione*

$$f(x) = \frac{x\,|x|}{\log|x|}$$

e disegnarne il grafico.

SOLUZIONE:

- Insieme di definizione $x \neq 0, x \neq \pm 1$,
- la funzione é prolungabile per continuitá in $x = 0$ attribuendole il valore 0 del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x|x|}{\log(|x|)} = 0$$

In $x = \pm 1$ si hanno due asintoti verticali,

- la funzione é derivabile in tutti gli $x \neq \pm 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\log(x)} & x > 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{x(-1 + 2\log(x))}{\log^2(x)} \\ \\ \dfrac{-x^2}{\log(-x)} & x < 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{x(1 - 2\log(-x))}{\log^2(-x)} \end{cases}$$

quindi $f(x)$ é crescente per $x \leq -\sqrt{e}$ e per $x \geq \sqrt{e}$: é decrescente negli altri intervalli.

-

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

8.7. Esercizio. *Determinare i polinomi di Taylor $T_m(x)$ relativi alla funzione $F(x) = \sqrt{1+x}$ nel punto $x_0 = 0$, di ordini $m = 1, 2, 3$.*

SOLUZIONE:

$$F(x) = \sqrt{1+x} \quad \rightarrow \quad F(x) = (1+x)^{1/2} \quad \rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{1/2-1} \quad \rightarrow$$

$$F''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)(1+x)^{1/2-2}, \quad F'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)(1+x)^{1/2-3}$$

Calcolando funzione e derivate nel punto $x_0 = 0$ si ottiene

$$F(0) = 1,\ F'(0) = \frac{1}{2},\ F''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right), F'''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right), \dots$$

espressioni che si generalizzano (credibilmente) nella notazione dei coefficienti binomiali

$$\frac{F^{[k]}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2} - h\right) = \binom{1/2}{k}$$

Si ha pertanto la notevole espressione per i polinomi di Taylor di $F(x) = \sqrt{1+x}$ con $x_0 = 0$ seguente

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{1/2}{k} x^k$$

Pertanto

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x, \quad T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2, \quad T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Osservazione 8.1. *Si noti che quanto osservato per* $(1+x)^{1/2}$ *si ritrova del tutto analogamente per ogni altra potenza cosí da avere per i polinomi di* $(1+x)^\alpha$ *le espressioni*

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Nel caso che l'esponente α *sia un numero naturale* n *si ritrova lo sviluppo noto come* binomio di Newton , *tenuto conto che i coefficienti binomiali se* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *sono tutti nulli per* $k > n$

8.8. Esercizio. *Sia* $f(x) = \sin x + \cos x$. *Calcolare* $f(\frac{1}{2})$ *con un errore minore di* 10^{-3}.

SOLUZIONE:

Ricordati i polinomi di Taylor per $\sin(x)$ e per $\cos(x)$, per esempio per l'ordine $n = 5$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\sin^{[6]}(\xi), \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{x^6}{6!}\cos^{[6]}(\eta)$$

Ne segue quindi sommando e tenendo conto che $|\sin^{[6]}(\xi)| \leq 1, \ |\cos^{[6]}(\eta)| \leq 1$

$$\left|\sin(x) + \cos(x) - \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right\} - \left\{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right\}\right| \leq 2\,\frac{|x|^6}{6!}$$

Nel punto $x = 1/2$ si ha pertanto, indicato con $P(x)$ la somma dei due polinomi per $\sin(x)$ e per $\cos(x)$ si ha

$$|f(1/2) - P(1/2)| \leq 2\,\frac{|1/2|^6}{6!} = \frac{1}{23040} < 10^{-3}$$

8.9. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \sin x - x\,\cos x - \frac{x^3}{3}$$

- *si determini il suo ordine di infinitesimo in* $x_0 = 0$,
- *si determini il suo polinomio di Taylor* $T_5(x)$ *relativo a* $x_0 = 0$ *e ordine* $m = 5$
- *si esamini se in* $x_0 = 0$ *la funzione abbia un minimo o un massimo relativo.*

SOLUZIONE:

Consideriamo i polinomi di Taylor corrispondenti a $f(x)$

$$\begin{aligned} \sin(x) &\mapsto x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\ \cos(x) &\mapsto 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \\ x\cos(x) &\mapsto x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 \end{aligned}$$

Da cui segue

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \left\{ x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 \right\} - \frac{x^3}{3} + o(x^6)$$

Ovvero svolti i calcoli

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^5 + o(x^6)$$

si riconosce che $f(x)$ é un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine $n = 5$.
Il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine 5 é (quindi)

$$T_5(x) = -\frac{1}{30}x^5$$

Il carattere dispari della prima derivata diversa da zero,

$$f^{[5]}(0) = -\frac{1}{30}$$

indica che in $x_0 = 0$ la funzione f non ha né minimo né massimo relativi

8.10. Esercizio.
Sia $f(x) = \log(1 + x^2)$, *determinare*

- *la retta tangente al grafico nel punto* $P = (1, f(1))$,
- *i polinomi di Taylor* $T_1(x)$ *e* $T_2(x)$ *relativi a* $x_0 = 0$
- *il massimo del modulo* $|f(x) - T_1(x)|, \quad x \in [0, 2]$.

SOLUZIONE:

La retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ derivabile in x_0 ha l'equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \to \quad y = x - 1 + \log(2)$$

Tenuto conto che

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 1$$

si ha

$$T_1(x) = 0, \quad T_2(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Il polinomio esprime la retta tangente nell'origine, l'asse x stesso,

$$|f(x) - T_1(x)| = \log(1 + x^2) \leq \log(5)$$