Soluzioni Foglio di esercizi 5

5.1 Esercizio

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2(2-1/n)(2+1/n)} = \frac{1}{4},$$

da cui la tesi per il criterio del confronto asintotico.

Cerchiamo A, $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Mettiamo a comune denominatore, semplifichiamo il denominatore e raccogliamo i termini a destra. Risulta

$$0 = n(2A + 2B) + (A - B - 1).$$

Affinchè questa uguaglianza sia soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}$, dobbiamo scegliere A, $B \in \mathbb{R}$ soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ A - B - 1 = 0, \end{cases}$$

e quindi $A = -B = 1/2$. Quindi

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right). \tag{1}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, calcoliamo la somma parziale n-esima della serie, tenendo conto di (1):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right).$$

Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1},$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

La somma della serie risulta perciò

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Osservazione. Serie della forma $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ sono chiamate *serie telescopiche.*

5.2 Esercizio

$\Sigma_{k=1}^{n}$

5.2 Esercizio

- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$
$$= \frac{2}{1-1/3} = 3$$

- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{27} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k =$$
$$= \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{24}$$

$$\circ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k+3^k}{6^k} =$$

$$= \lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{6}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{6}\right)^k \right)$$

$$= \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

"ha lo stesso carattere"

5.3 Esercizio

$$\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

quindi diverge. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}\sqrt{1+1/n}} = 1$$

da cui la tesi per il criterio del confronto asintotico

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

Infatti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n^{3/2}}{1/\sqrt{n(n^2+1)}} = 1$$

da cui la tesi per il criterio del confronto asintotico.

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

Verifichiamo dapprima che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = 0$$

Si ha

$$\lim_{n} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = 0$$

Questo conto ci dice anche che, essendo

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \quad \forall n,$$

allora

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

va a zero con la stessa velocità di $\frac{1}{n^{3/2}}$

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^{3/2}}{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}} = 2$$

da cui la convergenza della serie per il criterio del confronto asintotico.

5.4 Esercizio

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto per capirne il carattere:

$$\lim_{n} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Dal momento che $1/3 < 1$, il criterio del rapporto ci assicura che la serie converge.

Inoltre

$$\frac{n^3}{3^n} \geq \frac{1}{3^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1/3^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}.$$

5.5 Esercizio

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2}{n+1} = 0.$$

quindi la serie converge.

- Posto $a_n = 2^n/n!$, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} \qquad \forall n \geq 2$$

quindi
$$a_{2+k} \leq \left(\tfrac{2}{3}\right) a_{2+(k-1)} \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 a_{2+(k-2)} \leq \dots \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^k a_2$$

Da questo segue
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2+k} \leq 1 + 2 + \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^k$$

Cioè
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \leq 3 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k = 3 + 2 \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = 9.$$

5.6 Esercizio

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{x}{n^3}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^3} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$$

La serie data converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$

La serie converge per $x = 0$. Per $x \neq 0$, la serie non converge assolutamente. Infatti, per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{n}} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente.

Questo però non ci dà informazioni sul carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/\sqrt{n})$.

Osserviamo allora che $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c.

$$-\pi/2 < \frac{x}{\sqrt{n}} < \pi/2 \qquad \forall n \geq N$$

in particolare

$\sin(x/\sqrt{n})$ ha lo stesso segno di $x/\sqrt{n}$

Se $x > 0$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sin(x/\sqrt{n}) = \sum_{n=N}^{+\infty} |\sin(x/\sqrt{n})|$$

e dunque

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/\sqrt{n})$ diverge a $+\infty$

Se $x < 0$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sin(x/\sqrt{n}) = -\sum_{n=N}^{+\infty} |\sin(x/\sqrt{n})|$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/\sqrt{n}) \quad \text{diverge a } -\infty.$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(x))^n$$

La serie è una serie geometrica di ragione $\sin(x)$, quindi

- se $|\sin(x)| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(x))^n \quad \text{converge}$$

- se $\sin(x) = 1$, i.e. $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(x))^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1)^n = +\infty$$

- se $\sin(x) = -1$, i.e. $x \in \left\{-\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(x))^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

è indeterminata

5.7 Esercizio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(x^2)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

La serie è a termini positivi, quindi regolare.

Per $|x| \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x^2)^n} \neq 0$$

quindi la serie non converge. Essendo a termini positivi, questo vuol dire che diverge a $+\infty$.

Sia $|x|>1$. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+(x^2)^n}} = \lim_{n} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1+1/x^2}}$$

Si noti che

$$1 \leq \sqrt[n]{1+1/x^2} \leq 2^{1/n}$$

$$\downarrow_{n\to\infty} \qquad\qquad \downarrow_{n\to\infty}$$

$$1 \qquad\qquad\qquad 1$$

quindi (Teo. dei 2 carabinieri)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+1/x^2} = 1.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+(x^2)^n}} = \frac{1}{x^2} < 1$$

quindi la serie converge per $|x| > 1$.

5,8 Esercizio

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Per $|x|>1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} \neq 0$$

quindi la serie non converge.

Per $x=1$ la serie diverge (è la serie armonica)

Per $x=-1$ la serie converge (per il criterio di Leibnitz sulle serie a segno alterno).

Per $|x|<1$ la serie converge perché converge assolutamente, i.e.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n} \quad \text{converge}$$

Infatti $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n/n} = |x|$$

da cui la tesi per il criterio della radice.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Ragionando come in (a), si ha che la serie non converge per $|x| > 1$, mentre converge assolutamente per $|x| < 1$.

In questo caso, però, la serie converge assolutamente anche per $x = \pm 1$ visto che

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{è convergente.}$$

c) $$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

Per $|x| \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} n x^n \neq 0$$

quindi la serie non converge.

Per $|x| < 1$, la serie converge assolutamente.

Infatti dal criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|x|^n} = \lim_{n} |x| \sqrt[n]{n} = |x| < 1.$$

5.9 Esercizio

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x^2)} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{(1+1/x)}{(-1+3/x^2)} = -1$$

c) $l_1 = 1 \qquad l_2 = -1$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{x^2+x}{3-x^2}$$

Basta trovare $\bar{x}$ t.c.

$$\begin{cases} |f(x) - l_1| \leq 1/2 \\ |g(x) - l_2| \leq 1/2 \end{cases} \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

• $|f(x) - l_1| \leq 1/2$

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} \right| = \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$x^2+1 \geq 4 \qquad x^2 \geq 3$$

Basta che $x \geq \sqrt{3}$

$$|g(x) - l_2| \leq 1/2$$

$$\left| \frac{x \cancel{+ x^2}}{3 - x^2} + \frac{3 \cancel{- x^2}}{3 - x^2} \right| = \frac{|x+3|}{|3-x^2|} \leq \frac{1}{2}$$

Sia $x > \sqrt{3}$. Allora

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|x+3|}{|3-x^2|} = \frac{x+3}{x^2-3}$$

da cui

$$2x + 6 \leq x^2 - 3 \qquad x^2 - 2x - 9 \geq 0$$

Le radici di $x^2 - 2x - 9 = 0$ sono

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+9}}{1} = 1 \pm \sqrt{10} = \begin{cases} 1+\sqrt{10} \\ 1-\sqrt{10} \end{cases}$$

Basta prendere $x > 1 + \sqrt{10}$
(Notare che $1 + \sqrt{10} > \sqrt{3}$)

Dunque

$|f(x) - l_1| \leq 1/2$ è vera per $x \geq \sqrt{3}$

$|g(x) - l_2| \leq 1/2$ è vera per $x \geq 1 + \sqrt{10}$ $(> \sqrt{3})$

Basta scegliere $\bar{x} = 1 + \sqrt{10}$

5.10 Esercizio

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

La funzione non è definita per $x = 0$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per $x \neq 0$ si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Il $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$ poiché il limite destro e sinistro (che esistono) non coincidono.

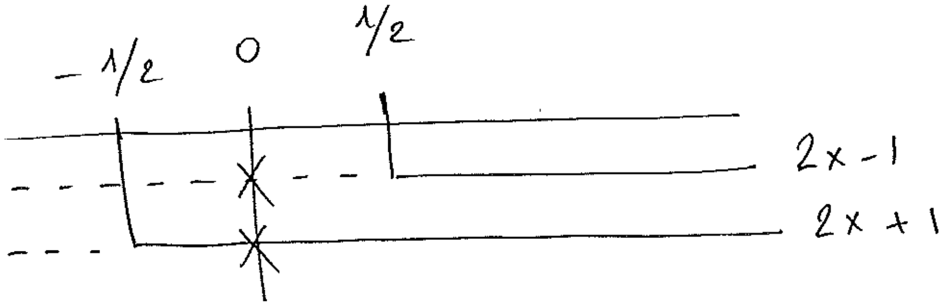
5.11 Esercizio

$$f(x) = \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$2x - 1 \geq 0$ se $x \geq 1/2$

$2x + 1 \geq 0$ se $x \geq -1/2$



$\boxed{\text{se } x < -1/2}$

$$f(x) = \frac{-2x + 1 + 2x + 1}{x} = \frac{2}{x}$$

$\boxed{\text{se } -1/2 \leq x \leq 1/2}$ $\boxed{\& \; x \neq 0}$

$$f(x) = \frac{1 - 2x - 2x - 1}{x} = -4$$

$\boxed{\text{se } x > 1/2}$

$$f(x) = \frac{2x - 1 - 2x - 1}{x} = -\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (-4) = -4$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$