Corsi di Laurea in Fisica, Fisica e Astrofisica

Prova in itinere del 2·11·2011

Lo studente svolga quanti più esercizi riesce.

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = 2 - \sqrt{2x+4},$$

a) determinare l'insieme di definizione;

b) determinare l'insieme immagine;

c) dire se f è invertibile. In caso affermativo, determinare f^{-1}.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione é definita per

$$2x + 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -2$$

Tenuto conto che l'addendo $-\sqrt{2x+4}$ produce al variare di $x \geq -2$ tutti i numeri reali negativi, l'insieme immagine é $y \leq 2$.

f é monotona decrescente

$$a < b \quad \rightarrow \quad 2a+4 < 2b+4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2a+4}-2 < \sqrt{2b+4}-2 \quad \rightarrow \quad f(a) > f(b)$$

quindi é invertibile.

$$2-\sqrt{2x+4} = y \quad \rightarrow \quad \sqrt{2x+4} = 2-y \quad \rightarrow \quad 2x+4 = (2-y)^2 \quad \rightarrow \quad x = -2+\frac{1}{2}(2-y)^2$$

da cui

$$\forall y \leq 2 : \; f^{-1}(y) = -2 + \frac{1}{2}(2-y)^2$$

Esercizio 2. *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x^2 - 4 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \, : \, x(4-x)(5-x) < 0\}.$$

a) Verificare se A è limitato.

b) Verificare se A è intervallo.

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'insieme A é unione di piú intervalli:

- l'intervallo $[-2, 2]$ estremi inclusi,
- due dei quattro intervalli determinati dai tre valori $0, 4, 5$: l'intervallo $(-\infty, 0)$ estremi esclusi e l'intervallo $(4, 5)$ anch'esso estremi esclusi.

Pertanto

$$A = (-\infty, 2] \cup (4, 5)$$

- non é limitato,
- non é un intervallo, manca il tratto $(2, 4]$,
- $\sup A = 5$ non é massimo.

Esercizio 3. *Sia $(a_n)_n$ la successione*

$$a_n = \frac{n^2+1}{3\,n^2-5}$$

a) Provare che è limitata.

b) Determinarne il limite ℓ.

c) Posto $\varepsilon = 3$, determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La successione é limitata:

$$\left|\frac{n^2+1}{3\,n^2-5}\right| \le \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1} \le 2$$

La successione é convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3\,n^2-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}$$

La distanza di a_n dal limite:

$$\left|\frac{n^2+1}{3\,n^2-5} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{8/3}{3n^2-5}\right| \le 3$$

disuguaglianza soddisfatta da tutti gli $n \ge 1$.

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \left|\frac{3x+1}{3x-1}\right| \le 1 \right\}.$$

a) Determinare l'insieme A.

b) Esaminare se A è limitato.

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A.

SOLUZIONE:

$$\left|\frac{3x+1}{3x-1}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |3x+1| \leq |3x-1|$$

ovvero

$$\text{distanza}\{3x,\, -1\} \leq \text{distanza}\{3x,\, 1\}$$

da cui

- A é la semiretta $A := \{x \leq 0\}$
- A non é limitato,
- $\sup A = \max A = 0$

Esercizio 5. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + (-1)^n \log(n)}{n^3 + \log(n+1)} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} 5\,n - \sqrt{25\,n^2 - n}.$$

SOLUZIONE:

$$\frac{n^2 + (-1)^n \log(n)}{n^3 + \log(n+1)} = \frac{n^2}{n^3} \frac{1 + \frac{(-1)^n \log(n)}{n^2}}{1 + \frac{\log(n+1)}{n^3}} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{(-1)^n \log(n)}{n^2}}{1 + \frac{\log(n+1)}{n^3}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + (-1)^n \log(n)}{n^3 + \log(n+1)} = 0$$

$$5n - \sqrt{25n^2 - n} = \frac{\left(n - \sqrt{25n^2 - n}\right)\left(n + \sqrt{25n^2 - n}\right)}{n + \sqrt{25n^2 - n}} == \frac{n}{n + \sqrt{25n^2 - n}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \left(5\,n - \sqrt{25\,n^2 - n}\right) = \frac{1}{5}$$

Esercizio 6. *Si consideri la successione* $(a_n)_n$ *definita come*

$$a_n = \begin{cases} \log\left(\dfrac{n}{n+3}\right) & \textit{se } n \textit{ pari} \\ \\ \dfrac{1}{2+n^2} & \textit{se } n \textit{ dispari.} \end{cases}$$

a) *Calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.*

b) *Calcolare, se esiste,* $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Le due successioni, quella dei termini pari e quella dei dispari sono entrambe monotone:

- quella dei pari, fatta di numeri negativi , é crescente e inizia con $a_2 = -\log(2) \simeq -0.69314$,
- quella dei dispari, fatta di numeri positivi é decrescente e inizia con $\frac{1}{3}$.

É evidente quindi che

$$\forall n : \quad -\log(2) \le a_n \le \frac{1}{3}$$

Da cui

$$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = -\log(2), \quad \sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \frac{1}{3}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = 0$$

se ne deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$