Corsi di Laurea in Fisica, Fisica e Astrofisica

Prova in itinere del 2/11/2011

Lo studente svolga quanti più esercizi riesce.

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \sqrt{3x-9} - 5,$$

a) determinare l'insieme di definizione;

b) determinare l'insieme immagine;

c) dire se f è invertibile. In caso affermativo, determinare f^{-1}.

Soluzione:

La funzione é definita per

$$3x - 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 3$$

Tenuto conto che l'addendo $\sqrt{3x-9}$ produce al variare di $x \geq 3$ tutti i numeri reali positivi, l'insieme immagine é $y \geq -5$.

f é monotona crescente

$$a < b \quad \rightarrow \quad 3a - 9 < 3b - 9 \quad \rightarrow \quad \sqrt{3a-9} - 5 < \sqrt{3b-9} - 5 \quad \rightarrow \quad f(a) < f(b)$$

quindi é invertibile.

$$\sqrt{3x-9} - 5 = y \quad \rightarrow \quad \sqrt{3x-9} = y + 5 \quad \rightarrow \quad 3x - 9 = (y+5)^2 \quad \rightarrow \quad x = 3 + \frac{1}{3}(y+5)^2$$

da cui

$$\forall y \geq -5: \; f^{-1}(y) = 3 + \frac{1}{3}(y+5)^2$$

Esercizio 2. *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x(3-x)(8-x) > 0\}.$$

a) Verificare se A è limitato.

b) Verificare se A è intervallo.

c) Determinare l'estremo inferiore di A e dire se è minimo di A.

Soluzione:

L'insieme A é unione di piú intervalli:

- l'intervallo $[-2, 2]$ estremi inclusi,
- due dei quattro intervalli determinati dai tre valori $0, 3, 8$: l'intervallo $(0, 3)$ estremi esclusi e l'intervallo $(8, +\infty)$ anch'esso estremi esclusi.

Pertanto

$$A = [-2, 2] \cup (0, 3) \cup (8, +\infty)$$

- non é limitato,
- non é un intervallo, manca il tratto $[3, 8]$,
- A ha minimo: $\inf A = \min A = -2$

Esercizio 3. *Sia* $(a_n)_n$ *la successione*

$$a_n = \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1}$$

a) Provare che è limitata.

b) Determinarne il limite ℓ.

c) Posto $\varepsilon = 2$, *determinare per quali* $n \in \mathbb{N}$ *risulta*

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La successione é limitata:

$$\left| \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{2 + \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \leq 2 + \frac{7}{n^2} \leq 9$$

La successione é convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{32n^2 - 7}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{7}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 2$$

La distanza di a_n dal limite:

$$\left| \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1} - 2 \right| = \frac{9}{n^2 + 1} \leq 2 \quad \to \quad \frac{7}{2} \leq n^2$$

disuguaglianza soddisfatta da tutti gli $n \geq 2$.

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| \leq 1 \right\}.$$

a) Determinare l'insieme A.

b) Esaminare se A *è limitato.*

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A.

SOLUZIONE:

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| \leq |x-2|$$

ovvero

$$\text{distanza}\{x,\, -2\} \leq \text{distanza}\{x,\, 2\}$$

da cui

- A é la semiretta $A := \{x \leq 0\}$
- A non é limitato,
- $\sup A = \max A = 0$

Esercizio 5. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,\cos(\pi\, n) - \log(n)}{n^3 - \log n^3 + 1} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} 2\,n - \sqrt{4\,n^2 - n}.$$

SOLUZIONE:

$$\frac{n\,\cos(\pi\, n) - \log(n)}{n^3 - \log n^3 + 1} = \frac{n}{n^3}\,\frac{\cos(\pi\, n) + \frac{\log(n)}{n}}{1 - \frac{\log(n^3)}{n^3} + \frac{1}{n^3}} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{(-1)^n + \frac{\log(n)}{n}}{1 - \frac{\log(n^3)}{n^3} + \frac{1}{n^3}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,\cos(\pi\, n) - \log(n)}{n^3 - \log n^3 + 1} = 0$$

$$2n - \sqrt{4\,n^2 - n} = \frac{\left(2n - \sqrt{4\,n^2 - n}\right)\left(2n + \sqrt{4\,n^2 - n}\right)}{2n + \sqrt{4\,n^2 - n}} = \frac{n}{2n + \sqrt{4\,n^2 - n}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2\,n - \sqrt{4\,n^2 - n}\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6. *Si consideri la successione* $(a_n)_n$ *definita come*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3-n^2} & \textit{se } n \textit{ pari} \\ \\ \log\left(\dfrac{2\,n}{2\,n-1}\right) & \textit{se } n \textit{ dispari.} \end{cases}$$

a) *Calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.*

b) *Calcolare, se esiste,* $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

SOLUZIONE:

Le due successioni, quella dei termini pari e quella dei dispari sono entrambe monotone:

- quella dei pari, fatta di numeri negativi per $n \geq 2$, é crescente e inizia con $a_2 = -1$,
- quella dei dispari, fatta di numeri positivi é decrescente e inizia con $\log(2) \simeq 0.69314$.

É evidente quindi che

$$\forall n: \quad -1 \leq a_n \leq \log(2)$$

Da cui

$$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = -1, \quad \sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \log(2)$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = 0$$

se ne deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$