Corsi di Laurea in Fisica, Fisica e Astrofisica

Prova in itinere del 2.11.2011

Lo studente svolga quanti più esercizi riesce.

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \sqrt{2x-4} - 1,$$

a) determinare l'insieme di definizione;

b) determinare l'insieme immagine;

c) dire se f è invertibile. In caso affermativo, determinare f^{-1}.

Soluzione:

La funzione é definita per

$$2x - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 2$$

Tenuto conto che l'addendo $\sqrt{2x-4}$ produce al variare di $x \geq 2$ tutti i numeri reali positivi, l'insieme immagine é $y \geq -1$.

f é monotona crescente

$a < b \quad \rightarrow \quad 2a-4 < 2b-4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2a-4}-1 < \sqrt{2b-4}-1 \quad \rightarrow \quad f(a) < f(b)$

quindi é invertibile.

$$\sqrt{2x-4}-1 = y \quad \rightarrow \quad \sqrt{2x-4} = y+1 \quad \rightarrow \quad 2x-4 = (y+1)^2 \quad \rightarrow \quad x = 2+\frac{1}{2}(y+1)^2$$

da cui

$$\forall y \geq -1 : \; f^{-1}(y) = 2 + \frac{1}{2}(y+1)^2$$

Esercizio 2. *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x(4-x)(5-x) > 0\}.$$

a) Verificare se A è limitato.

b) Verificare se A è intervallo.

c) Determinare l'estremo inferiore di A e dire se è minimo di A.

Soluzione:

L'insieme A é unione di piú intervalli:

- l'intervallo $[-1, 1]$ estremi inclusi,
- due dei quattro intervalli determinati dai tre valori $0, 4, 5$: l'intervallo $(0, 4)$ estremi esclusi e l'intervallo $(5, +\infty)$ anch'esso estremi esclusi.

Pertanto

$$A = [-1, 1] \cup (0, 4) \cup (5, +\infty)$$

- non é limitato,
- non é un intervallo, manca il tratto $[4, 5]$,
- A ha minimo: $\inf A = \min A = -1$

Esercizio 3. *Sia $(a_n)_n$ la successione*

$$a_n = \frac{3n^2 - 5}{n^2 + 1}$$

a) Provare che è limitata.

b) Determinarne il limite ℓ.

c) Posto $\varepsilon = 3$, determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La successione é limitata:

$$\left| \frac{3n^2 - 5}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{3 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \leq 3 + \frac{5}{n^2} \leq 8$$

La successione é convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 3$$

La distanza di a_n dal limite:

$$\left| \frac{3n^2 - 5}{n^2 + 1} - 3 \right| = \frac{8}{n^2 + 1} \leq 3 \quad \to \quad \frac{5}{3} \leq n^2$$

disuguaglianza soddisfatta da tutti gli $n \geq 2$.

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 1 \right\}.$$

a) Determinare l'insieme A.

b) Esaminare se A è limitato.

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A.

Soluzione:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| \leq |x-1|$$

ovvero

$$\text{distanza}\{x,\,-1\} \leq \text{distanza}\{x,\,1\}$$

da cui

- A é la semiretta $A := \{x \leq 0\}$
- A non é limitato,
- $\sup A = \max A = 0$

Esercizio 5. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,n + \log(n^4)}{n^3 + \log n + 1} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - n.$$

Soluzione:

$$\frac{3\,(-1)^n\,n + \log(n^4)}{n^3 + \log(n) + 1} = \frac{n}{n^3}\,\frac{3(-1)^n + \frac{4\log(n)}{n}}{1 + \frac{\log(n)}{n^3} + \frac{1}{n^3}} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{3(-1)^n + \frac{4\log(n)}{n}}{1 + \frac{\log(n)}{n^3} + \frac{1}{n^3}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\,(-1)^n\,n + \log(n^4)}{n^3 + \log n + 1} = 0$$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6. *Si consideri la successione $(a_n)_n$ definita come*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3}{1+n^2} & \textit{se } n \textit{ pari} \\ \\ \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right) & \textit{se } n \textit{ dispari.} \end{cases}$$

a) Calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.

b) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

SOLUZIONE:

Le due successioni, quella dei termini pari e quella dei dispari sono entrambe monotone:

- quella dei pari, fatta di numeri positivi, é decrescente e inizia con $a_2 = 3/5$,
- quella dei dispari, fatta di numeri negativi é crescente e inizia con $-\log(2) \simeq -0.69314$.

É evidente quindi che

$$\forall n: \quad -\log(2) \le a_n \le \frac{3}{5}$$

Da cui

$$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = -\log(2), \quad \sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \frac{3}{5}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

se ne deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$