

12.1 Esercizio

Dire se i seguenti insiemi, in \mathbb{R}^2 , sono o non sono aperti, chiusi, limitati:

- i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$
- ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3\}$
- iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$
- iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y^2) \leq 1/2\}$
- v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Z}\}$
- vi) $\{(n, m) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

12.2 Esercizio

Posto

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{\sin(n)}{n} \right), \quad n \geq 1,$$

stabilire se la successione $\{P_n\}$ di \mathbb{R}^3 è convergente.

12.3 Esercizio

Posto $P_n = ((-1)^n, (-1)^{n^2}, (-1)^{n^3}), n \geq 1,$

- i) provare che la successione $\{P_n\}$ è limitata;
- ii) trovare almeno due sottosuccessioni convergenti.

12.4 Esercizio

Data la curva di equazioni parametriche (*asteroide*)

$$x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0)$$

- i) verificare se γ è una curva regolare;
- ii) calcolare la lunghezza di γ .

12.5 Esercizio

Data la curva di equazioni parametriche (*elica cilindrica*)

$$x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

verificare che la curva è regolare e se ne calcoli la lunghezza.

12.6 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva in forma polare $\rho = e^\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (*spirale logaritmica*).

12.7 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva in forma polare $\rho = (1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (*cardioide*).

12.8 Esercizio

Determinare e disegnare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \sqrt{xy + y^2}, f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}, f(x, y) = \log(4 - x^2 - 9y^2).$$

12.9 Esercizio

Determinare l'insieme in cui

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2/y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

è continua. Disegnare le linee di livello $f(x, y) = c$.

12.10 Esercizio

Data la funzione $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$

i) determinare l'insieme di definizione di f ;

ii) calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

iii) disegnare le linee di livello $f(x, y) = c$.

12.11 Esercizio

Sia

$$f(x, y) = x^2y$$

i) Disegnare le linee di livello $\{f(x, y) = c\}$ per $c = 0, 1, 2$.

ii) Calcolare le derivate parziali di f nel punto $(2, 1)$ e disegnare il gradiente in tale punto.

iii) Disegnare la direzione del gradiente in almeno quattro punti presi sulla linea di livello $f(x, y) = 2$.

12.12 Esercizio

Siano

$$f(x, y) = 3xy + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y, \quad g(x, y) = 4xy + 4x + 2y^2 - 4y$$

- i) determinare i punti stazionari o critici delle due funzioni,
- ii) decidere se le immagini $f(\mathbb{R}^2)$ e $g(\mathbb{R}^2)$ sono insiemi limitati .

12.13 Esercizio

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x + y) & x + y < 0, \\ ax + by + c & x + y \geq 0 \end{cases}$$

Per quali a, b, c la funzione f è continua in \mathbb{R}^2 ?

12.14 Esercizio

Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- i) dire se è continua;
- ii) calcolare le derivate parziali nei punti $(x, y) \neq (0, 0)$;
- iii) calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali nel punto $(0, 0)$.

12.15 Esercizio

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2) + b & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} .$$

- i) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in \mathbb{R}^2 ?
- ii) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$?

12.16 Esercizio

Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

dimostrare che

- i) f non è continua in $(0, 0)$;
- ii) f ammette le derivate parziali f_x e f_y in $(0, 0)$.

12.17 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali curvilinei lungo la curva γ :

$$\int_{\gamma} x^7 ds, \quad \gamma : y = x^5, 0 \leq x \leq 2;$$

$$\int_{\gamma} (2 + x^2 y) ds, \quad \gamma : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0;$$

$$\int_{\gamma} y ds, \quad \gamma : x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 2;$$

$$\int_{\gamma} \frac{y}{x} ds, \quad \gamma : x = t^4, y = t^3, \frac{1}{2} \leq t \leq 1;$$

$$\int_{\gamma} xy^4 ds, \quad \gamma : x^2 + y^2 = 16, x \geq 0.$$