ANALISI

Foglio di esercizi

11 novembre 2011

6.1 Esercizio

Usando la definizione, verificare la validità dei seguenti limiti :

$$\lim_{x\to 2} 3x+2 = 8\,, \qquad \lim_{x\to a} x^2 = a^2\,, \quad a = 1\,,\, 2$$

calcolando per ogni $\epsilon > 0$ il relativo δ_ϵ.

6.2 Esercizio

Ricordati i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

calcolare, se esistono, i limiti che seguono oppure discutere se esistono almeno i limiti sinistro e destro:

$$(a)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}; \quad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}; \quad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{x};$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\,; \quad (e)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x}{3-x} \quad (f)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}-1};$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{\sin(x)}; \quad (h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}; (i)\ \lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x};$$

$$(l)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\mathrm{e}^x + x^2}{x^3+1}; (m)\ \lim_{x\to 0}\arctan(\frac{1}{x})\,, \quad (n)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin(\pi x)}.$$

6.3 Esercizio

Al variare di $a \in \mathbb{R}$ calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-x^2}{a^x}\,, \quad a > 0\,.$$

6.4 Esercizio

(a) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni siano continue in $\mathbb{R}$:

$$\textbf{(i)} \qquad f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & x \leq 0 \\ ax^2 + b & x > 0 \end{cases} ;$$

$$\textbf{(ii)} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\sin(\pi x) & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} .$$

Determinare il grafico di f e di g in corrispondenza di una delle coppie lecite, a scelta.

(b) Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} b\cos(x) & x < 0, \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & x \geq 0, \end{cases}$$

Disegnare il grafico di g.

6.5 Esercizio

Assegnati n numeri x_1, x_2, $\ldots x_n$ diversi tra loro sia

$$f(x) = \min\{|x - x_1|, \ |x - x_2|, \ldots |x - x_n|\}$$

- determinare gli estremi inferiore e superiore di f,
- esaminare se $f(x)$ è continua,
- esaminare se $f(x)$ è lipschitziana.

6.6 Esercizio

Assegnata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & se \ x \leq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & se \ x > 0 \end{cases}$$

- esaminare se è limitata,
- esaminare se è continua,
- determinare l'immagine,
- determinare l'inversa.

6.7 Esercizio

Assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + |x|)}{|x|}$$

- determinare l'insieme di definizione,
- esaminare se è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}$
- determinare l'immagine.

6.8 Esercizio

(a) Dimostrare che l'equazione $3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$ ha tre radici reali.

(b) Dimostrare che le seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione positiva:

$$\textbf{(i)} \quad e^x - e^{\sin(x)} - 1 = 0; \quad \textbf{(ii)} \quad x + \sin(x)\cos(x) - 1 = 0.$$

6.9 Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, continua, essendo $\mathbb{Q}$ i razionali: dimostrare che se $f(1) = 1$ allora f é costante.