ANALISI

Foglio di esercizi

21 ottobre 2011

3.1 Esercizio

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ la successione

$$a_n = (1+\lambda)^n$$

- determinare per quali λ è limitata,
- determinare per quali λ è convergente,
- determinare per quali λ è monotona.

3.2 Esercizio

Sia $\{a_1.a_2, \dots\}$ la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$$

- calcolare i primi cinque termini,
- determinare gli estremi inferiore e superiore,
- verificare che riesce
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
- determinare una sottosuccessione monotona.

3.3 Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+\sin(n)\log(n)}{n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos(n)\left(\log(\sqrt{n}+1)-\log(\sqrt{n+1})\right);$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^n - 2^n; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2^n-5^n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{3^n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n^2)}{n}$$

3.4 Esercizio

Calcolare i limiti seguenti al variare di $a>0$:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n - \frac{1}{n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin(n^{-a}); \qquad \lim_{n\to+\infty} a^n - n^a.$$

3.5 Esercizio

Sia $(a_n)_n$ la successione definita come

$$a_n = n^2 + An + B \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

con A e B numeri reali. Per quali valori di A e B la successione é strettamente monotona? Per quali è definitivamente monotona?

3.6 Esercizio

(i) Facendo uso del Teorema dei due carabinieri, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} = 1.$$

(ii) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$.

(iii) Dimostrare che se $(a_n)_n$ é una qualsiasi successione limitata di numeri positivi, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+a_n} = 1.$$

3.7 Esercizio

Siano

$$S_n = 1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

- calcolare i numeri S_n esplicitamente,
- determinare il limite
$$\lim_{n\to\infty} S_n$$
- determinare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{1+S_n^2}$$

3.8 Esercizio

Assegnati p, $q \in \mathbb{N}$ sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ la successione

$$a_n = \frac{1+n^p}{1+n^q}$$

- determinare per quali p, q la successione è limitata,
- determinare per quali p, q la successione è convergente,
- per quali p, q la successione ha limite $\ell = 1$

3.9 Esercizio

Sia $x \geq 0$ e siano

$$a_n = \sqrt[n]{x}, \quad b_n = \sqrt[n^2]{x^2}, \quad c_n = \sqrt[n^3]{x}$$

- esaminare se le successioni $\{a_1, a_2, ..\}, \{b_1, b_2, ..\}, \{c_1, c_2, ..\}$, sono limitate,
- in caso positivo determinare gli estremi inferiore e superiore,
- esaminare per quali x siano monotone crescenti, per quali decrescenti, per quali non monotone,
- esaminare se sono convergenti.

3.10 Esercizio

Il numero periodico

$$x = 0.3434343434....$$

puó essere letto come il limite della successione

$$S_n = \frac{34}{100} + \frac{34}{100^2} + \cdots + \frac{34}{100^n}$$

- determinare esplicitamente i numeri razionali S_n,
- determinare il
$$\lim_{n\to\infty} S_n$$
- detto $y = 0.3535353535...$ determinare l'espressione razionale del prodotto $x.y$

3.11 Esercizio

Sia $h > 0$ posto

$$a_n = (1+h)^n$$

posto

$$b_n = \frac{n^2}{a_n}$$

provare che la successione $\{b_1, b_2, \dots\}$ è convergente.

3.12 Esercizio

Assegnata la successione $\{a_1, a_2, \dots\}$ con

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

- calcolare i primi cinque termini,
- posto $a_n = 1 + h_n$ determinare maggioranti di h_n
- riconoscere che riesce
$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

3.13 Esercizio

Assegnata la successione $\{a_1, a_2, \dots\}$ di numeri positivi

- provare che la successione $\{b_1, b_2, \dots\}$ con
$$b_n = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$
è monotona crescente,
- provare che la successione $\{c_1, c_2, \dots\}$
$$c_n = \frac{1}{1 + b_n}$$
è convergente.

3.14 Esercizio

Siano $\{a_1, a_2, \dots\}$ e $\{b_1, b_2, \dots\}$ due successioni convergenti

- esaminare in quali casi le successioni
$$m_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad M_n = \max\{a_n, b_n\}$$
sono convergenti,
- in quali casi almeno una di esse è convergente,
- cosa puó dirsi della successione $\{c_1, c_2, \dots\}$
$$c_n = \frac{m_n + M_n}{2}$$