Argomento delle lezioni del corso di Analisi A.A.2011-2012

30 gennaio 2012

Lezione 1-2 (5 ottobre 2011) Numeri naturali, interi, razionali. Definizione intuitiva dei reali attraverso la retta. Definizione assiomatica: principio degli intervalli incapsulati e assioma di Archimede.

Lezione 3-4 (6 ottobre 2011) Definizione di modulo in R e proprieta'. Distanza in R. Definizione di maggiorante e minorante e definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme E di R. Esempi.

Lezione 5-6 (7 ottobre 2011) Estremo superiore e estremo inferiore di un insieme E di numeri reali. Teorema di esistenza (la dimostrazione verra' fatta in seguito). Esempi. (Fine del Capitolo 1, prima parte delle dispense). Nozione di funzione, grafico di una funzione. Esempi di funzioni reali di variabile reale e relativi grafici: retta $ax + b, x^2 + b, a/x$. Funzioni pari e simmetria del grafico.

Lezione 7-8 (12 ottobre 2011) Funzioni dispari e simmetria del grafico. Grafico di $f(x) = ax^2 + bx + c$, x^3, $|x|$, parte intera di x, parte frazionaria di x. Grafico di $f(x + c)$, $f(x) + c$. Esempi: $|x + 1|$, $|x| + 1$, $(x + 1)^2$, $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $||x| - 1|$, $|3|x| - 1|$. Funzioni periodiche di periodo T. Esempi: $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$. Grafico di $|\cos x|$, $tg\, x|$.

Funzioni iniettive e funzioni inverse. Esempio: $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$.

Definizione di funzione strettamente crescente e decrescente.

Lezione 9-10 (13 ottobre 2011) Studio di $f(x) = x^n$ con $x \in I$, dove $I = [0, +\infty)$ o $I = \mathbf{R}$ a seconda che n sia pari o dispari. Definizione di $x^{1/n}$. f monotona strettamente crescente o decrescente implica f^{-1} monotona strettamente crescente o decrescente. Grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f.

Inverse di funzioni trigonometriche: arcsin, arccos, arctan. Funzione esponenziale a^x e funzione logaritmo di base a, con $a > 0$. Grafici relativi. Caso $a = e$.

Lezione 11-12 (14 ottobre 2011) Funzioni composte. Esercizi vari. Definizione di estremo superiore ed inferiore di una funzione su un insieme $I \subseteq \mathbf{R}$. Funzioni limitate superiormente o inferiormente. Nozione di massimo,minimo, punto di massimo, punto di minimo di una funzione reale definita su un insieme $I \subseteq \mathbf{R}$. Vari esempi. (Fine del Capitolo 2, prima parte delle dispense).

Lezione 13-14 (19 ottobre 2011) Successioni: definizione ed esempi. Successioni monotone. Limite di successione. Calcolo di limiti applicando la definizione. Proprietà verificate definitivamente. Unicità del limite. Successioni limitate. Limitatezza di successioni convergenti. Successioni divergenti. Operazione con i limiti: somma, prodotto. Forme indeterminate.

Lezione 15-16 (20 ottobre 2011) Lezione tenuta dal Prof. Lamberti (http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti/HTML_2011/lezioni/diariogiornaliero.html)

Lezione 17-18 (21 ottobre 2011) Operazione con i limiti: quoziente. Forme indeterminate. Teoremi della permanenza del segno, della monotonia del limite, dei due carabinieri, sull' esistenza del limite di successioni monotone.

Alcuni limiti notevoli: $\sqrt[n]{p}$,$p > 0$; α^n; $\sqrt[n]{n}$.

Confronto tra infiniti:

$$\log n,\ n^b (b > 0),\ a^n (a > 1),\ n!,\ n^n$$

Calcolo di $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^b}$.

Lezione 17-18 (26 ottobre 2011)

Criterio del rapporto tra a_n e a_{n+1}. Calcolo dei limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n};\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!};\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n};\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^n}.$$

Somma geometrica: $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$.

Limiti trigonometrici:

$$a_n \to 0 \Rightarrow \sin(a_n) \to 0; a_n \to 0 \Rightarrow \cos(a_n) \to 0; a_n \to 0 \Rightarrow \frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1.$$

Principio di induzione ed applicazioni.

Lezione 19-20 (27 ottobre 2011) Definizione di numero di Nepero tramite il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + 1/n)^n = \mathrm{e}.$$

$$a_n \to \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (1 + a_n)^{1/a_n} = \mathrm{e}$$

Forme indeterminate.

Sottosuccessioni, limite di sottosuccessioni di una successione convergente. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Successioni di Cauchy.

Lezione 21-22 (28 ottobre 2011) Criterio di Cauchy.

Serie numeriche. Definizione di serie convergenti, divergenti, indeterminate. Serie geometrica. Serie telescopiche. Condizione necessaria di convergenza. Serie a termini positivi. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto, del confronto asintotico.

Lezione 23-24 (2 novembre 2011) PRIMO ESONERO

Lezione 25-26 (3 novembre 2011) Serie armonica e serie armonica generalizzata. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del rapporto e criterio della radice.

Lezione 27-28 (4 novembre 2011) Convergenza assoluta implica la convergenza semplice. Serie esponenziale.

Limiti di funzioni in un punto e all'infinito. Limite destro e limite sinistro. Teoremi sui limiti. Forme indeterminate.

Lezione 29-30 (9 novembre 2011) Dimostrazione che

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1; \lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$$

Limite di polinomi e di funzioni razionali.

Limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e};$$

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = \mathrm{e}; \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1; \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Non esistenza dei limiti:

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{\sin x}{|x|}; \lim_{x\to 0^\pm} [x]; \lim_{x\to 0^\pm} \{x\}.$$

Teorema ponte. Dimostrare che non esiste $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$.

Lezione 31-32 (10 novembre 2011)

$$\lim_{x\to\pi/2^\pm} \mathrm{tg} x = \pm\infty; \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{arctg} x = \pm\pi/2$$

Calcolo di limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x}; \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}; \lim_{x\to 0} (2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x^2}); \lim_{x\to\infty} (x - \sin x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x \qquad 0 < a < 1; \quad a = 1; \quad a > 1$$

Gerarchie di infiniti (senza dim.)

$$\lim_{x\to+\infty} (\log x)^\beta / x^\alpha = 0, \lim_{x\to+\infty} a^x/x^\alpha = 0 \text{ per} \alpha,\, \beta > 0, a > 1; \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0.$$

Funzioni continue. Continuità della somma, differenza, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue. Classificazione delle discontinuità.

Lezione 33-34 (11 novembre 2011) Funzioni lipschitziane.

Teoremi sulle funzioni continue: Teorema della permanenza del segno, Teorema di esistenza degli zeri, Teorema dei valori intermedi.

Lezione 35-36 (16 novembre 2011) Teorema di Weierstrass. Immagine di una funzione continua definita in un intervallo. f continua: $f([a,b]) = [m,M]$.

Continuitaà dell'inversa di una funzione continua definita in un intervallo (NO DIM.) Continuità di $\arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg} x, logx$. Continuità di $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$. Forme indeterminate 0^0 e 1^∞.

Applicazione del postulato degli intervalli incapsulati: dimostrazione dell'esistenza dell'estremo superiore di un insieme non vuoto e limitato superiormente.

Lezione 37-38 (17 novembre 2011) Derivata: definizione, significato grafico, derivata come velocità. Derivata destra e derivata sinistra. Calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari: $f(x) = cost.$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$. Continuità delle funzioni derivabili. Esempio: $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in 0. Studio di $f(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ per $n = 0, 1, 2$.

Regole fondamentali di derivazione: linearità, prodotto, quoziente.

Lezione 39-40 (18 novembre 2011) Teorema di derivazione di funzioni composte. Teorema della derivata della funzione inversa . Calcolo della derivata di arcsin, arccos, arctg.

Massimi e minimi relativi: definizione. Teorema di Fermat.

Lezione 41-42 (23 novembre 2011) Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Interpretazione geometrica e conseguenze.

$f'(x) = 0$ in (a, b) implica $f(x) = \textit{costante}$.

$f'(x)$ limitata in (a, b) implica f lipschitziana in (a, b).

Teorema: f continua in (a, b) e derivabile in $(a, b) \setminus x_0$. Se esiste finito $\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x) = l_\pm$ e $l_+ = l_-$ allora f è derivabile in x_0.

Lezione 43-44 (24 novembre 2011) Teorema di Cauchy. Monotonia e segno delle derivate. Derivate successive. Teo: Sia f derivabile 2 volte in (a, b). Sia x_0 tale che $f(x_0) = 0$. Se $f''(x_0) > 0$ allore x_0 punto di min. relativo. Se $f''(x_0) < 0$ allore x_0 punto di max. relativo.

Funzioni convesse: definizione e significato geometrico. Teo 1: f derivabile in (a, b). f convessa se e sole se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (no dim.)

Teo 2. f derivabile in (a, b). f convessa se e sole se $f'(x)$ crescente in (a, b). (no dim.)

Teo3. f derivabile due volte in (a, b). f convessa se e sole se $f''(x) \geq 0$ in (a, b).

Punti di flesso. Teo. f derivabile due volte in (a, b). C.N. affinchè f sia un punto di flesso è che $f''(x_0) = 0$.

Studio della funzione $f(x) = 1 - |x^3 - 1|$ (punto angoloso)

Lezione 45-46 (25 novembre 2011) Studio della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ (cuspide),

Studio di funzione: $f(x) = x \exp(1/(x - 1)$.

Teorema di L'Hopital (dim. solo nel caso $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$).

Lezione 47-48 (30 novembre 2011)

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \log x, \quad a > 0; \lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}; \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - \sin x}{x^3}$$

Formula di Taylor con resto di Peano. Sviluppo di MacLaurin di e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1 + x)$. Calcolo di limiti.

Lezione 49-50 (1 dicembre 2011) Formula del resto di Lagrange. Calcolo di $\sin(1/10)$ e di $\sqrt{17}$.

Ordini di infinito e di infinitesimo. Infiniti campione e infinitesimi campione.

Lezione 51-52 (2 dicembre 2011) Esercizi in preparazione dell'esonero. Classificazione dei punti a derivata nulla.

Lezione 53-54 (7 dicembre 2011) SECONDO ESONERO

Lezione 55-56 (14 dicembre 2011) $f \geq 0$; f limitata in $[a, b]$, area del sottografico di f.

f di segno qualsiasi, limitata in $[a, b]$. Definizione di somme integrali per eccesso e per difetto; $\underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$, $\forall P, Q$. $\underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, P \cup Q)$ e $\overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(f, P \cup Q)$.

Def.: f integrabile in $[a, b]$ se

$$\inf \overline{S}(f, P) = \sup \underline{S}(f, Q) := \int_a^b f(x)dx.$$

Proposizione. f integrabile ses

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P_\epsilon : \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon.$$

Dim. che $f(x) = x$ è integrabile in $[a, b]$ e $\int_a^b x\,dx = (b^2 - a^2)/2$.

Lezione 57-58 (15 dicembre 2011) Dim. che $f(x) = c$ è integrabile in $[a, b]$ e $\int_a^b c\,dx = c\,(b - a)$. Dim. che la funzione di Dirichlet non è integrabile in $[-1, 2]$. Proprietà degli integrali : linearità (no dim.), additività, monotonia, modulo.

Classi di funzioni integrabili: monotone, lipschitziane (con dim.), continue (senza dim.).

Teorema della media integrale.

Lezione 59-60 (16 dicembre 2011) Funzioni definite da integrali.

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Ex: studio di $f(x) = \int_0^x \cos(t^3)dt$.

Funzioni primitive, integrali indefiniti e definiti. Tabella delle primitive elementari.

Formule di integrazione per parti, esempi:

$$\int \log x\,dx; \int x\,e^x\,dx; \int e^x \cos x\,dx;$$

$$\int x^{13} \log x\,dx, \int (\log x)^3 dx$$

Lezione 61-62 (21 dicembre 2011) Integrali per sostituzione:

$$\int \cos(5x)\,dx; \int x \cos(x^2)\,dx; \int \frac{\log x}{x} dx$$

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx, \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int x\cos x dx,, \int \tan x\, dx, \int \cos^3 x dx, \int \sin^2 x\, dx$$

Integrazione di funzioni razionali:

$$\int \frac{1}{ax+b}dx, \int \frac{x}{x^2+a^2}dx, \int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

Integrazione di $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ nei casi $\Delta >, =, < 0$ con esempi.

Lezione 63-64 (11 gennaio 2012) Numeri Complessi

Lezione 65-66 (12 gennaio 2012) Equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee e non omogenee. Metodo di variazione delle costanti, metodo di somiglianza.

Lezione 67-68 (13 gennaio 2012) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee e non omogenee. Problema di Cauchy. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. Esempio proposto $y'' + 2y' - 3y = \cos t + e^t$.

Lezione 69-70 (18 gennaio 2012) Ricapitolazione sulle ED del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea e non omogenea con il metodo di somiglianza.

$\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale, Definizione e proprietà del prodotto scalare; dis. di Cauchy-Schwarz. Definizione di norma e proprietà. Definizione di distanza e proprietà. Esempi di norme in $\mathbb{R}^N$: $||x||_p$, $||x||_\infty$, disegno di $E_p = \{x \in R^2 : ||x||_p = 1\}$ nei casi $p = 1, 2, \infty$.

Lezione 71-72 (19 gennaio 2012) Successioni in $\mathbb{R}^n$ (convergenti, limitate, enunciato di Bolzano-Weierstress).

Topologia di $\mathbb{R}^n$: palla aperta, insiemi aperti e chiusi, frontiera e derivato, esempi. Due proposizioni che caratterizzano i chiusi -con le successioni, con i punti di accumulazione- solo enunciato naturalmente.

Curve regolari. Curve regolari a tratti.

Lezione 73-74 (20 gennaio 2012) Lunghezza di una curva. Esempi:

$$(\cos t, \sin t)\ t \in [0, 2\pi]; (t^3, t^2)\ t \in [0, 1]; cicloide; cardioide$$

.

Funzioni di due variabili (grafico, insiemi di livello) Esempi:

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad f(x, y) = 1/(x - y); \quad f(x, y) = 2y/(y + x^2).$$

definizione di limite (finito e infinito) in un punto e per $||x|| \to \infty$.

Lezione 75-76 (25 gennaio 2012) Limiti in due variabili. Limiti riconducibili a funzioni di 1 variabile. Non esistenza con limiti lungo curve. Funzioni radiali. Limiti in coordinate polari.

Funzioni continue. Teorema di Weierstrass (no dim.). Insiemi connessi. Teorema di esistenza degli zeri (no dim.)

Derivate parziali. Derivate direzionali. Definizione di gradiente.

Lezione 77-78 (26 gennaio 2012) Formula delle derivate direzionali per funzioni di classe 1.(no dim.).

Legame tra derivabilità e continuità; tra esistenza di derivate direzionali e continuità.

Integrali curvilinei.

Lezione 79-80 (27 gennaio 2012) Esercizi in preparazione dell'esonero.

Lezione 81-82 (30 gennaio 2012) TERZO ESONERO