Carte,

ipercarte,

superfici di Riemann

Antonio Machì

Università ‘La Sapienza’’, Roma

21 Febbraio 2008

Una *carta topologica* è una decomposizione di una superficie Σ (compatta, connessa, orientabile) in tre insiemi $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ tali che

(i) $\mathcal{M}_0$ è un insieme finito di punti (le 0–celle);

(ii) $\mathcal{M}_1$ è un insieme finito di archi di Jordan aperti i cui estremi appartengono ad $\mathcal{M}_0$ (1–celle);

(iii) $\mathcal{M}_2$ è un insieme finito di aperti disgiunti di Σ omeomorfi a dischi aperti, le frontiere dei quali giacciono in $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$ (2–celle).

Per un risultato classico il numero

$$|\mathcal{M}_0| - |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$$

non dipende dalla carta $\mathcal{M}$; si tratta della *caratteristica di Eulero* $\chi(\Sigma)$ della superficie Σ. Si ha $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$, e g è il *genere* di Σ.

Una carta topologica su una supericie Σ determina un grafo $\mathcal{G}$ immerso in Σ, con vertici, archi e facce dati rispettivamente da $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_2$. A questa immersione di $\mathcal{G}$ corrisponde una *carta combinatoria* come segue. Sia $e = (u, v)$ un arco di $\mathcal{G}$, e consideriamo le due incidenze

$$(e, u) \ , \quad (e, v)$$

L'orientamento della superficie permette di stabilire, per ogni vertice v di $\mathcal{G}$, una permutazione circolare delle incidenze a v.

K_4 sul piano (sfera) (4 facce triangolari)

$$\sigma = (1,3,5)(2,12,8)(4,7,9)(6,10,11)$$

$$\alpha = (1,2)(3,4)\cdots(11,12)$$

$$\alpha\sigma = (1,12,6)(2,3,7)(4,5,10)(8,9,11)$$

(Figura 1)

K_4 sul toro: due modi con 2 facce,

una quadrata e una ottagonale

una triangolare, una ennagonale

(Figura 2)

Si ottengono così:

– una permutazione σ spezzata in cicli, uno per ogni vertice;

– una permutazione α ottenuta dallo scambio delle due incidenze su ogni arco (una involuzione senza punti fissi);

– una permutazione $\alpha\sigma$ spezzata in cicli che descrivono le facce.

Ne segue:

– il numero $z(\sigma)$ di cicli di σ dà il numero di vertici,

– il numero $z(\alpha)$ di cicli di α dà il numero di archi,

– il numero $z(\alpha\sigma)$ di cicli di $\alpha\sigma$ dà il numero di facce.

Dalla formula di Eulero abbiamo allora:

$$z(\sigma) - z(\alpha) + z(\alpha\sigma) = 2 - 2g, \tag{1}$$

dove g è il genere della superficie. Se $g = 0$, la carta è *planare* .

Denotiamo d'ora in poi le incidenze (e, v) con le cifre $1, 2, \ldots, n$ per cui la permutazione α sarà

$$\alpha = (1, 2)(3, 4) \cdots (n - 1, n),$$

con n=doppio del numero degli archi.

Diremo allora che la carta $< \sigma, \alpha >$ è *immersa* nella superficie Σ.

Σ connessa significa che il gruppo

$$< \sigma, \alpha >$$

è transitivo.

Data ora una coppia di permutazioni tale che $<\sigma, \alpha>$ è transitivo, e α è un'involuzione s.p.f, Come si determinano la superficie e la carta topologica corrispondenti?

Osserviamo intanto che date due permutazioni σ e α che generano un gruppo transitivo, si ha sempre:

$$z(\sigma) - z(\alpha) + z(\alpha\sigma) \leq 2;$$

inoltre, la differenza

$$2 - (z(\sigma) - z(\alpha) + z(\alpha\sigma)),$$

è un numero pari, $2g$, e si ha la (1).

L'intero g sarà il genere della superficie che cerchiamo (che quindi sarà un toro a g buchi).

Considerando ora per ogni ciclo di $z(\alpha\sigma)$ di lunghezza l un poligono orientato di l lati, associamo ordinatamente ai lati le cifre che compaiono nel ciclo.

Se (i, j) è un arco, i e j compaiono in due cicli differenti. Identifichiamo allora (topologia quoziente) i lati i e j dei poligoni corrispondenti.

Facendo così per ogni ciclo di $\alpha\sigma$ otteniamo la superficie Σ, nella quale è immerso il grafo i cui vertici e archi sono i vertici e i lati dei poligoni (con le identificazioni).

Lasciando cadere l'ipotesi che α sia un'involuzione senza punti fissi, la coppia di permutazioni (σ, α) è una *ipercarta combinatoria*.

Il ruolo di vertici, archi e facce è ora del tutto simmetrico. Come si immerge questo oggetto in una superficie?

Intanto, si ha l'analogo della (1):

$$z(\sigma) + z(\alpha) + z(\alpha^{-1}\sigma) = n + 2 - 2g, \qquad (2)$$

che si dimostra nello stesso modo, osservando che per la transitività

$$z(\sigma) + z(\alpha) + z(\alpha^{-1}\sigma) \leq n + 2,$$

e che scrivendo la differenza non negativa dei due membri come

$$(n - z(\sigma)) + (n - z(\alpha)) + (n - z(\alpha^{-1}\sigma)) - 2n + 2,$$

la somma dei primi tre addendi è pari.

Come sopra, vediamo cos'è una *ipercarta topologica* $\mathcal{H}$ su una superficie Σ. È una decomposizione di Σ nei sottoinsiemi di tre famiglie $V, E, F = \Sigma \setminus (V \cup E)$ tali che:

(i) V e E sono unioni di un numero finito di insiemi chiusi omeomorfi a dischi piani;

(ii) un elemento di V e uno di E si intersecano in al più un numero finito di punti;

(iii) F è un'unione finita di 2–celle.

Il genere di $\mathcal{H}$ è il genere di Σ.

Figure 3,4,5,5bis

A partire da $\mathcal{H}$ si può costruire una *carta* topologica $\mathcal{M}$ i cui vertici sono i punti di intersezione (ii), gli archi le frontiere degli insiemi di V ed E, e le facce le parti interne dei V, E e $\mathcal{H}$. Se B è l'insieme dei punti di intersezione allora $\mathcal{M}$ ha $|B|$ vertici, $2|B|$ archi e $|V| + |E| + |F|$ facce; la formula di Eulero fornisce: $|B| - 2|B| + |V| + |E| + |F| = 2 - 2g$, da cui

$$|V| + |E| + |F| = |B| + 2 - 2g. \tag{3}$$

che è la *formula di Eulero per le ipercarte topologiche*.

Se $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ e si sceglie un orientamento per gli insiemi $v \in V$, percorrendo le frontiere dei v abbiamo un ciclo per ogni v, e in totale una permutazione σ spezzata in cicli. Scegliendo per gli $e \in E$ l'orientamento opposto, abbiamo una permutazione α , mentre il prodotto $\alpha^{-1}\sigma$ descrive la frontiera degli $f \in F$. La (3) diventa la (2).

Dato ora un (iper)grafo, ci si può chiedere in quali superfici si può immergere (con quale genere).

Sia $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ un insieme, V ed E due partizioni di B. La coppia di partizioni è *connessa* se ogniqualvolta un'unione di classi di V uguaglia un'unione di classi di V questa unione è l'intero insieme B. V ed E sono i vertici e gli archi di un *ipergrafo*, nel quale un (iper)arco può essere incidente più volte a uno stesso (iper)vertice.

Un (iper)arco e è incidente a un vertice v se $e \cap v \neq \emptyset$.

Introducendo un ordine nelle classi di V ed E si ottengono due permutazioni σ e α spezzate in cicli, e la connettività significa che il gruppo che esse generano è transitivo.

In corrispondenza ai diversi ordini possibili si ottengono diverse permutazioni, cioè diverse ipercarte per uno stesso grafo, e quindi dalla (3) diversi generi g, e varie superfici nelle quali si può immergere il grafo (e possibilmente in più modi in una stessa superficie).

Automorfismi

Se $\mathcal{T}$ è un'ipercarta topologica, un automorfismo di $\mathcal{T}$ è un omeomorfismo Φ della superficie tale che $\phi(V) = V$, $\phi(E) = E$. Ne segue $\phi(V \cap E) = V \cap E$, e quindi Φ permuta i punti di intersezione.

Φ induce un automorfismo ϕ della corrispondente ipercarta combinatoria $\mathcal{H} = (\sigma, \alpha)$, e si ha un morfismo $Aut(\mathcal{T}) \to Aut(\mathcal{H})$. Inoltre, ogni automorfismo di $\mathcal{H}$ si può sollevare a uno di $\mathcal{T}$. $Aut(\mathcal{T})$ è molto grande e complicato; ci limitiamo pertanto ad $Aut(\mathcal{H})$.

Posto $G = Aut(\mathcal{H})$, $\phi \in G$ permuta i punti di intersezione. Si tratta quindi di una permutazione di B che conserva vertici e archi, e quindi i cicli di ciascuna di queste permutazioni. Ne segue, se $|B| = n$,

$$G = C_{S^n}(\sigma) \cap C_{S^n}(\alpha).$$

È noto che essendo $< \sigma, \alpha >$ transitivo, G è un gruppo semiregolare (le orbite hanno tutte la stessa lunghezza $|G|$), e pertanto $|G|$ divide n. Se G è regolare, l'ipercarta si dice *regolare* .

Esempi

1. Carta di K_4. Se $g = 0$, G è generato dalle due permutazioni:

$$\phi = (1,2)(3,12)(4,11)(5,8)(6,7)(9,10),$$

$$\psi = (1,6,12)(2,5,11)(3,10,8)(4,9,7).$$

Si ha $|G| = 12$ e si tratta di A^4 (come c'era da aspettarsi) e G è regolare.

Se $g = 1$, con una faccia triangolare e una ennagonale, queste devono essere fissate, e quindi l'ordine di G è 3 (o 1). G ha ordine 3, generato da:

$$(1,11,7)(2,12,8)(3,6,9)(4,5,10).$$

Per l'altra carta di genere 1 (una faccia quadrata e l'altra ottagonale) G è ciclico di ordine 4, generato da:

$$(1,4,10,12)(5,7,6,8)(2,3,9,12).$$

2. Ipercarte del piano di Fano. Intanto, $|G|$ divide 21. Se $g = 1$, G contiene

$$\phi = (1,5,17)(2,6,18)(3,4,16)(7,21,11)(8,19,12)(9,20,10)(13,15,14)$$

di ordine 3, e

$$\psi = (1,13,11,8,16,20,6)(2,14,12,9,17,21,4)(3,15,10,7,18,19,5)$$

di ordine 7; queste non permutano, e quindi il gruppo è il gruppo non abeliano di ordine 21, ed è regolare.

Le due permutazioni sono anche automorfismi dell'ipercarta di Fano di genere 3, per cui le due carte hanno lo stesso gruppo.

Ipercarta quoziente

Se i e j appartengono a una stessa orbita di G, lo stesso accade per $\sigma(i)$ e $\sigma(j)$, in quanto se $\phi(i) = j$, allora

$$\phi(\sigma(i)) = \sigma(\phi(i)) = \sigma(j),$$

e analogamente per α. Ne segue che σ agisce sulle orbite di G, e lo stesso accade per α. Siano $\widehat{\sigma}$ e $\widehat{\alpha}$ le permutazioni ottenute in questo modo. Il gruppo da esse generato è transitivo perché lo è $< \sigma, \alpha >$.

L'ipercarta $(\widehat{\sigma}, \widehat{\alpha})$ è l'*ipercarta quoziente* della (σ, α) rispetto al gruppo G.

Esempio

Nell'ipercarta di Fano di genere 1, consideriamo l'automorfismo:

$$\phi = (1,5,17)(2,6,18)(3,4,16)(7,21,11)(8,19,12) \\ (9,20,10)(13,15,14),$$

e siano x, y, z, t, u, v, w i cicli di ϕ (nell'ordine scritto). Allora, nell'azione di σ e α su ϕ,

$$\widehat{\sigma} = (x, v, z)(y, w, t)(u),\ \widehat{\alpha} = (x, y, z)(t, u, v)(w),$$

e la carta $(\widehat{\sigma}, \widehat{\alpha})$ ha genere 0.

L'ipercarta di genere 3 su ϕ ha genere 1.

Figura 6

Formula di Riemann–Hurwitz

Sussiste la seguente formula analoga alla formula di Riemann–Hurwitz della teoria delle superfici di Riemann:

$$2g - 2 = |G|(2\gamma - 2) + \sum_{1 \neq \phi \in G} \chi(\phi).$$

dove $\chi(\phi)$= numero totale di cicli ("punti") di σ, α e $\alpha^{-1}\sigma$ fissati da ϕ.

γ è il genere dell'ipercarta quoziente $(\hat{\sigma}, \hat{\alpha})$ che agisce sulle orbite di G.

La formula si dimostra utilizzando la formula del genere e la formula di Burnside sul numero di orbite di un gruppo che agisce su un insieme.

Corollari

1. $\gamma \leq g$.

2. $\phi \neq 1$ fissa al più $2g+2$ punti.

3. Se $g \geq 2$, e ϕ è un'involuzione che fissa $2g+2$ punti, allora:
$i)$ ϕ è l'unica involuzione che fissa $2g+2$ punti;
$ii)$ ϕ è centrale;
$iii)$ ogni altro elemento $\neq 1$ fissa al più 4 punti.

4. Se $g \geq 2$, e $o(\phi) = p$, primo, allora $p \leq 2g+1$.

5. Se $g = 0$, allora G è uno dei gruppi C_n, D_n, A^4, S^4, A^5.

6. (Hurwitz) Sia $g \geq 2$; allora:

$$|G| \leq 84(g-1).$$

(Si ha anche una minorazione per l'ordine massimo: $|G| \geq 8(g+1)$).

Omologia

Sia W un gruppo abeliano libero di base $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Il gruppo $< \sigma, \alpha >$ agisce su W permutando la base, e siano

$$V,\ E,\ F$$

i sottogruppi fissati da

$$\sigma,\ \alpha,\ \alpha^{-1}\sigma.$$

Per ogni ciclo di σ, si consideri la somma degli elementi che vi appartengono. I vettori così ottenuti sono una base per V, per cui V ha rango

$$\rho(V) = z(\sigma).$$

Analogamente, E ed F hanno rango

$$\rho(E) = z(\alpha),\ \ \rho(F) = z(\alpha^{-1}\sigma).$$

La transitività implica:

$$\rho(V \cap E) = \rho(V \cap F) = \rho(E \cap F) = 1$$

(generato da $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$).

Complesso di catene

Sia $\psi : W \to V$, definita da

$$u_i \to \sigma_i - \sigma_{\alpha^{-1}(i)},$$

dove σ_k è la somma dei vettori del ciclo di σ in cui sta u_k. Se $(1, 2, \ldots, m)$ è un ciclo di α, allora

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{\alpha^{-1}(i)}$$

e quindi $E \subseteq ker(\psi)$.

Se $(1, 2, \ldots, m)$ è un ciclo di $\alpha^{-1}\sigma$, allora $\sigma_{\alpha^{-1}(1)} = \sigma_{\alpha^{-1}\sigma(1)}$ le immagini degli elementi u_i del ciclo si cancellano alternativamente.

Poiché $E \subseteq ker(\psi)$, ψ si fattorizza attraverso la proiezione $W \to W/E$. Abbiamo così il complesso di catene

$$C_2 \to C_1 \to C_0 \tag{4}$$

dove $C_2 = F$, $C_1 = W/E$ e $C_0 = V$.

Se K_i e I_i sono nuclei e immagini di ∂_i, $i = 1, 2$, abbiamo $K_2 = F \cap E$ e dunque

$$\rho(I_2) = z(\alpha^{-1}\sigma) - 1.$$

Inoltre,

$$\rho(I_1) = z(\sigma) - 1,$$

ed essendo $\rho(I_1)+\rho(K_1) = \rho(W/E) = n-z(\alpha)$. Ne segue,

$$\rho(K_1/I_2) = (n-z(\alpha)-(z(\sigma)-1)+(z(\alpha^{-1}\sigma)-1),$$

che è uguale a $2g$. I gruppi di omologia del complesso (2) sono:

$$H_0 = C_o/I_1, \;\; H_1 = K_1/I_2, \;\; H_2 = K_2,$$

di rango rispettivamente $1, 2g, 1$.

Se $\eta \in Aut(\mathcal{H})$ e $u \in V$, allora $\sigma(u) = u$, per cui

$$\sigma\eta(u) = \eta\sigma(u) = \eta(u),$$

e V è $\eta-$invariante; lo stesso accade per E ed F.

I gruppi H_i sono anch'essi invarianti, e si ha:

η è l'identità su H_0 e H_2.

Per moduli $A' \subseteq A$ si ha

$$\rho(A) = \rho(A') + \rho(A/A'),$$

e se ϕ è un endomorfismo di A e $\phi(A') = A'$,

$$Tr(\phi|_A) = Tr(\phi|_{A'}) + Tr(\phi|_{A/A'}).$$

Con $\rho(C_0) = z(\sigma)$, $\rho(C_1) = n - z(\alpha)$,

$\rho(C_2) = z(\alpha^{-1}\sigma)$, $\rho(H_0) = \rho(H_2) = 1$,

$\rho(H_1) = 2g$,si ha:

$\rho(H_2) - \rho(H_1) + \rho(H_0) = \rho(C_2) - \rho(C_1) + \rho(C_0)$,

che è il caso $\phi = id$ della

$Tr(\phi|_{H_2}) - Tr(\phi|_{H_1} + Tr(\phi|_{H_0}) = Tr(\phi|_{C_2}) - Tr(\phi|_{C_1} + Tr(\phi|_{C_0})$

(*formula della traccia di Hopf*).

Si ha:

Se ϕ è un automorfismo dell'ipercarta (σ, α), per la traccia di ϕ su H_1 si ha:

$$Tr(\phi|_{H_1}) = 2 - (\chi(\sigma) + \chi(\alpha) + \chi(\alpha^{-1}\sigma)).$$

Fissando una base in H_1, ϕ *si rappresenta con una matrice intera* $2g \times 2g$ *simplettica, e se* $g \geq 2$ *la rappresentazione è fedele.*

Anche il gruppo degli automorfismi (omeomorfismi conformi) di una superficie di Riemann di genere g si rappresenta con matrici intera $2g \times 2g$ simplettica.

È naturale chiedersi allora se $Aut(\mathcal{H})$ agisce come automorfismi di una superficie di Riemann. La risposta è affermativa.

L'idea è che esiste un omomorfismo del *gruppo triangolare*

$$\Gamma =< x, y \mid x^p = y^q = (xy^{-1})^r = 1 >$$

sul gruppo $< \sigma, \alpha >$, dove

$$o(\sigma) = p, o(\alpha) = q, o(\alpha^{-1}\sigma) = r.$$

Γ si può rappresentare come gruppo di automorfismi di una superficie di Riemann che lascia invariata una tessellazione.

La superficie quoziente rispetto alla controimmagine dello stabilizzatore di un punto nel gruppo $< \sigma, \alpha >$ è omeomorfa alla superficie su cui è immersa l'ipercarta (σ, α).

Utilizzando questa tessellazione, si può costruire un'ipercarta isomorfa alla data sulla superficie quoziente.

Carte e superfici di Riemann

Sia

$$f(z, w) = w^2 - z = 0$$

una funzione della variabile complessa z. A ogni valore di $z = \rho e^{i\theta}$ corrispondono due valori di w:

$$w_1 = \sqrt{z} = \sqrt{\rho}e^{i\theta/2} = \sqrt{\rho}(cos(\theta/2)+isen(\theta/2)),$$

$$w_2 = -\sqrt{z} = -\sqrt{\rho}e^{-i\theta/2} =$$

$$\sqrt{\rho}(cos(\theta/2 + \pi) + isen(\theta/2 + \pi)).$$

Se il punto z descrive una curva chiusa che non circonda l'origine, l'argomento di z parte da un certo valore θ e ritorna a questo stesso valore:

Se invece la curva circonda l'origine, l'argomento θ di z aumenta o diminuisce di 2π (a seconda del senso di percorrenza della curva).

L'argomento di $\sqrt{z}$ sarà $(\theta \pm 2\pi)/2 = \theta/2 \pm \pi$. Ne segue:

$$sen(\theta/2 \pm \pi) = -sen(\theta/2),$$

e lo stesso per il coseno.

Girando intorno all'origine si ha allora:

$$w_1 = \sqrt{z} \rightarrow w_2 = -\sqrt{z}.$$

Inversamente, poiché $-cos(\theta/2+\pi) = cos(\theta/2)$, e lo stesso per il seno, abbiamo

$$w_2 = -\sqrt{z} \rightarrow w_1 = \sqrt{z}.$$

Ruotando intorno all'origine le due determinazioni si scambiano, e si ha la permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

(un numero pari di giri dà luogo alla permutazione identica, un numero dispari alla σ).

Ciò per quanto riguarda i punti al finito.

Per $z = \infty$, con la sostituzione $z = 1/z'$ si riporta l'esame all'intorno di $z' = 0$. Anche girando intorno a $z = \infty$ si ha allora la permutazione σ_1 delle due determinazioni w_1 e w_2:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo determinato tre permutazioni:

$$\sigma, \ \sigma_1, \ \ \sigma\sigma_1 = I.$$

È possibile ora costruire la superficie di Riemann della funzione data.

Consideriamo l'albero a due foglie (i due punti singolari 0 e ∞), una sua copia, e identifichiamo i punti 0 e i punti ∞ dei due alberi; si ottiene un grafo bipartito e la carta:

(Figura 7)

$$
\begin{aligned}
z(\sigma) &= (1,3)(2,5)(6,7)(4,8) \\
z(\alpha) &= (1,2)(3,4)(5,6)(7,8) \\
z(\alpha\sigma) &= (1,5,7,4)(2,3,8,6).
\end{aligned}
$$

per cui dalla formula di Eulero:

$$z(\sigma) - z(\alpha) + z(\alpha\sigma) = 2 - 2g$$

abbiamo $4 - 6 + 2 = 2 - 2g$, e $g = 0$:

La superficie di Riemann della funzione

$$w^2 - z$$

è la sfera.

Essa si può costruire a partire da due quadrati (le due facce della carta) e identificando (topologia quoziente) i lati che hanno le cifre sullo stesso ciclo di α (cioè sullo stesso arco del grafo).

In modo analogo si vede che, *per ogni n, la superficie di Riemann della funzione*

$$f(w,z) = w^n - z$$

è la sfera.
(Vi sono sempre i due punti di ramificazione 0 e ∞).

In generale, data una funzione algebrica:

$$f(z,w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z)$$

i punti di ramificazione si trovano tra i punti singolari, cioè:

1. i punti nei quali l'equazione ha radici multiple (finite), dove si ha:

$$f(z,w) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial w} = 0, \text{ con } a_0(z) \neq 0$$

(deve cioè essere uguale a zero il risultante, rispetto a w, tra f e la derivata f_w);

2. i punti nei quali l'equazione ha una o più radici infinite (in questi punti si ha $a_0(z) = 0$)).

Vediamo un altro esempio:

$$f(w,z) = w^4 - 2w^2 + 1 - z.$$

Il risultante vale $-256(z-1)z^2$, per cui i punti singolari sono 0 e -1. La funzione ha quattro rami:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{1+\sqrt{z}}, \\ w_2 &= \sqrt{1+\sqrt{z}}, \\ w_3 &= -\sqrt{1+\sqrt{z}}, \\ w_4 &= -\sqrt{1-\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

Per $z = 0$ si ha $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = w_4 = -1$. Inoltre,

$$f(0, w_i) = 0, \quad f_w|_{w_i} = 0.$$

Per $z = 1$,

$$f(1, w) = w^2(w^2 - 2)$$

che ha le radici 0 (doppia) e $w = \pm\sqrt{2}$.

Dimostriamo che questi punti sono di ramificazione.

1. $z = 0$. Quando $z = \rho e^{i\theta}$ percorre un cammino chiuso attorno a 0, il punto $\sqrt{z}$ ritorna su se stesso ma con anomalia $\theta + 2\pi$, e dunque

$$\sqrt{z} \to -\sqrt{z},$$

e pertanto

$$1 + \sqrt{z} \to 1 - \sqrt{z}.$$

Si passa cioè dal ramo $w_1$al ramo w_2.
Con un altro giro si ritorna a w_1, per cui w_1 e w_2 si scambiano. Lo stesso accade per w_3 e w_4, e si ha la permutazione:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_2 & w_1 & w_4 & w_3 \end{pmatrix}.$$

2. $z = 1$. Quando z percorre un cammino chiuso intorno a 1 (che non contiene l'origine), $1-\sqrt{z}$ compie un giro completo intorno all'origine. Se $1 - \sqrt{z} = \rho e^{i\theta}$, dopo un giro si ha $1 - \sqrt{z} = \rho e^{i\theta+2\pi}$ e dunque

$$w_2 = \sqrt{1 - \sqrt{z}} \to \rho^{1/2} e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{1 - \sqrt{z}} = w_4,$$

e analogamente $w_4 \to w_2$.

$w_1 = 1+\sqrt{z}$ non gira invece attorno all'origine, e quindi non cambia d'anomalia: quando z percorre un cammino chiuso intorno a 1, ritorna sul proprio valore, e lo stesso accade per w_3. Si ha in definitiva la permutazione:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1 & w_4 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}.$$

Girare intorno all'infinito è come muoversi su un cerchio che contiene 0 e -1,nel verso contrario, e quindi la permutazione che si ottiene è il prodotto

$$\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_2)^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_4 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così le tre permutazioni:

$\sigma_1 = (1,2)(3,4)$, $\sigma_2 = (1)(2,4)(3)$, $\sigma_3 = (1,2,3,4)$,

e si osservi che $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = id$.

Prendiamo allora quattro copie di un albero (corrispondenti ai quattro valori di w) che abbia una radice e tre foglie, una per ogni punto singolare, e identifichiamo la foglia $a_{i,j}$ con la foglia $a_{\sigma_j(i),j}$ (ciò che traduce il fatto che girando attorno al punto a_i si passa dal valore w_i a $w_{\sigma_j(i)}$ della funzione).

(Figura 8)

Denotiamo con $(s_{i,j}, t_{i,j})$ l'arco relativo al punto singolare $a_{i,j}$ sull'albero i (lati positivo e negativo dell'arco).

A partire da un $s_{i,j}$ percorrendo gli archi troviamo una successione:

$$(s_{i,j},\ t_{\sigma_j(i),j},\ s_{\sigma_j(i),j+1},\ t_{\sigma_{j+1}\sigma_j(i),j+1},\\ s_{\sigma_{j+1}\sigma_j(i),j+2},\ t_{\sigma_{j+2}\sigma_{j+1}\sigma_j(i),j+2},\ \dots,\\ t_{\sigma_{j+m-1}\sigma_{j+m-2}\cdots\sigma_{j+2}\sigma_{j+1}\sigma_j(i),j+m-1},\\ s_{\sigma_{j+m-1}\sigma_{j+m-2}\cdots\sigma_{j+2}\sigma_{j+1}\sigma_j(i),j+m})$$

e ricordando che il prodotto dei σ_j nell'ordine scritto (e quindi anche in ogni permutazione circolare) è l'identità, si ha che l'ultimo termine è $s_{i,j}$.

In questo modo si percorre il perimetro di una faccia, e si ha così che ogni faccia è lunga m (numero dei punti singolari), e ve ne sono n (grado del polinomio).
La carta che si ottiene ha:

$$n + \sum_{i=1}^{m} z(\sigma_i) \text{ vertici}$$

(n di tipo $s_{i,j}$ e tanti vertici di tipo $t_{i,j}$ quanti sono in totale i cicli delle m permutazioni), mn archi, n facce.

Nell'esempio,

vertici $s = (s_{1,1}, s_{1,2}, s_{1,3})(s_{2,1}, s_{2,2}, s_{2,3})$
$(s_{3,1}, s_{3,2}, s_{3,3})(s_{4,1}, s_{4,2}, s_{4,3})(t_{1,1}, t_{2,1})$
$(t_{1,3}, t_{2,3}, t_{3,3}, t_{4,3})(t_{2,2}, t_{4,2})(t_{3,1}, t_{4,1})(t_{1,2})(t_{3,2})$,

archi : $a = (s_{1,1}, t_{1,1})(s_{1,2}, t_{1,2}) \cdots\cdots (s_{4,3}, t_{4,3})$,

e il prodotto dà le facce :

$as = (s_{1,1}, t_{2,1}, s_{2,2}, t_{4,2}, s_{4,3}, t_{1,3}) \cdots\cdot$.

(Figura 9)

Vediamo un esempio che dà una carta (superficie) di genere 1.

Consideriamo la funzione:

$$w^2 = (z-a)(z-b)(z-c),$$

con a, b, c distinti. Questi tre punti sono di diramazione, e anche ∞ lo è. Con la solita costruzione:

(Figura 10)

Si ha:

$$\sigma = (1,3,5,7)(10,12,13,15)(2,9)(4,11)$$
$$(6,14)(8,16)$$

$$\alpha = (1,2)(3,4)\cdots(15,16)$$

$$\alpha\sigma = (1,9,12,4,5,14,15,8)(2,3,11,13,6,7,16,10).$$

Ne segue:

$$z(\sigma) + z(\alpha) + z(\alpha\sigma) = 6 + 8 + 2 = 16,$$

da cui $16 = 16 + 2 - 2g$ e $g = 1$. La carta si può disegnare sul toro come segue:

(Figura 11)

Bibliografia

N. Biggs, *The symplectic representation of a map automorphism*, Bull. LMS, 4 (1972), 303–306).

R. Cori, A.M., *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey*, Expo. Math. 10 (1992), 403-467.

H.M Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer 1980.

A. Hurwitz, *Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann., (39), 1–61.

G. Jones, D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces*, Proc. LMS 3, (37), 1978, 273–307.

G. Jones, D. Singerman, *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 1987.

A. M., *The Riemann–Hurwitz formula for the centralizer of a pair of pemutations*, Arch. Math., 42 (1984), 280–288.

A. M. *Homology of hypermaps*, Journal LMS, 2,(31), 1985, 10–16.

D. Singerman, *Automorphisms of maps, permutation groups and Riemann surfaces*, Bull. LMS, 8 (1976), 65–68.

S. Stahl, *Permutations and Riemann surfaces*, J. Comb. Theory., Series A 36, 237–239 (1984).