

1 I vettori.

Denotiamo P_oP_1 il segmento orientato avente come estremi i punti P_o e P_1 .
Due segmenti P_oP_1 e P_2P_3 sono **equipollenti** se hanno

- i) stessa lunghezza
- ii) stessa direzione (i.e. i due segmenti sono paralleli)
- iii) stesso verso

Quindi i due segmenti sono equipollenti se spostando parallelamente il segmento P_2P_3 in modo tale che P_2 coincida con P_o allora P_3 coincide con P_1 .

Definizione 1.1 Il vettore $\vec{v} = P_o\vec{P}_1$ è dato dall'insieme dei segmenti equipollenti al segmento P_oP_1 .

Quindi un vettore è completamente determinato da:

- i) la sua lunghezza
- ii) la sua direzione
- iii) il suo verso.

Viceversa un vettore si può pensare applicato in qualsiasi punto dello spazio. Per semplicità possiamo fissare un punto O che chiameremo **l'origine** e possiamo pensare tutti vettori applicati in O . Cioè tra tutti i segmenti equipollenti scegliamo quello applicato in O .

Il simbolo $|\vec{u}|$ indica la lunghezza del vettore \vec{u} anche detta norma di \vec{u} .

Somma. Dati due vettori \vec{u} e \vec{v} possiamo definire la somma con la regola del parallelogramma. Sia $\vec{u} = O\vec{P}_1$ e $\vec{v} = O\vec{P}_2$ possiamo determinare un unico punto P_3 tale che $P_1OP_2P_3$ formi un parallelogramma. Il vettore $\vec{u} + \vec{v} := O\vec{P}_3$.

Se i segmenti OP_1 e OP_2 sono paralleli cioè se i tre punti O , P_1 e P_2 sono allineati si considera il parallelogramma degenero. In particolare si sceglie P_3 anch'esso allineato e se i vettori $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ hanno lo stesso verso il vettore $O\vec{P}_3$ ha anch'esso lo stesso verso e ha lunghezza la somma delle lunghezze. Viceversa se i vettori $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ hanno verso opposto, il vettore $O\vec{P}_3$ ha il verso del vettore più lungo e lunghezza la differenza delle lunghezze:

Prodotto per uno scalare. Consideriamo lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e il vettore \vec{u} . Il prodotto $\lambda\vec{u}$ è dato da un vettore parallelo a \vec{u} di lunghezza $|\lambda\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}|$, di verso concorde a \vec{u} se $\lambda > 0$ e di verso opposto se $\lambda < 0$. Viceversa due vettori \vec{u} e \vec{v} sono **paralleli** (useremo anche il termine **linearmente dipendenti** oppure **colineari**) se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Equazione vettoriale di una retta. Un retta dello spazio è completamente determinata da un punto e un vettore non nullo. La retta r passante per il punto P_o e nella direzione del vettore \vec{u} è dato dall'insieme dei punti P tali che i vettori $P_o\vec{P}$ e \vec{u} siano linearmente dipendenti. In particolare

$$P \in r \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus P_o\vec{P} = t\vec{u}.$$

L'**equazione vettoriale** della retta r è data da

$$P_o\vec{P} = t\vec{u} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Equazione vettoriale di un piano. In modo analogo al piano euclideo \mathbb{R}^2 determinato da un punto O detto l'origine e da due vettori \vec{i} e \vec{j} possiamo determinare un piano dello spazio, individuando un punto P_o e due vettori \vec{u} e \vec{v} purchè non siano linearmente dipendenti. Il piano π passante per il punto P_o e avente come **giacitura** i vettori \vec{u} e \vec{v} è dato dall'insieme dei punti P tali che esistono $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che

$$P_o\vec{P} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

L'**equazione vettoriale** del piano π è data da

$$P_o\vec{P} = s\vec{u} + t\vec{v} \quad \forall s \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}.$$

Base euclidea. Supponiamo di avere fissato un punto O che chiamiamo origine, fissiamo inoltre un vettore unitario \vec{i} , determiniamo dunque un vettore unitario \vec{j} ortogonale a \vec{i} e un terzo vettore unitario \vec{k} ortogonale a \vec{i} e a \vec{j} . Inoltre scegliamo il vettore \vec{k} in modo tale che valga la regola della

mano destra: se poniamo il pollice e l'indice della mano destra nel verso e nella direzione dei vettori \vec{i} e \vec{j} , il verso del del vettore \vec{k} è dato dal verso del maggiore.

Consideriamo il piano π_{ij} passante per l'origine e avente \vec{i} e \vec{j} come giacitura. Sia P un punto generico dello spazio. Consideriamo la retta r_k passante per P nella direzione del vettore \vec{k} . Chiamiamo P_1 il punto di intersezione della retta r_k e del piano π_{ij} . Chiaramente

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + P_1\vec{P} \quad (1.1)$$

inoltre per definizione di retta

$$\exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } P_1\vec{P} = z\vec{k},$$

mentre per definizione del piano π_{ij}

$$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \text{ tali che } \vec{OP}_1 = x\vec{i} + y\vec{j},$$

Sostituendo queste due uguaglianze in (1.1) otteniamo

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Viceversa se consideriamo la terna (x, y, z) di elementi di \mathbb{R} allora il vettore $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ determina un punto P tale che

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

In questo modo fissata la base $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ possiamo identificare i punti dello spazio con le terne (x, y, z) . (x, y, z) sono le **coordinate** del punto P . Lo spazio delle terne (x, y, z) si chiama \mathbb{R}^3 .

Siccome possiamo pensare i vettori applicati nell'origine ad ogni vettore \vec{u} corrisponde un punto P_o tale che $\vec{u} = \vec{OP}_o$ e dunque se (x_o, y_o, z_o) sono le coordinate del punto P_o abbiamo in particolare

$$\vec{u} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}.$$

In questo modo possiamo identificare anche i vettori con le terne di \mathbb{R}^3 .

Ora siamo nella posizione di riprendere le definizioni geometriche delle operazioni sui vettori e darne le formule corrispondenti per le coordinate dei vettori.

Sia \vec{u} il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e \vec{v} il vettore di coordinate (v_x, v_y, v_z) :

- $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$
- il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ ha come coordinate $(u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$
- il vettore $\lambda\vec{u}$ ha coordinate $(\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z)$.

Esercizio: Giustificare queste formule.

Si osservi inoltre che

Proposizione 1.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori \vec{u} e \vec{v} siano linearmente indipendenti è che la matrice*

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

abbia rango 2.

Dimostrazione: Se \vec{u} e \vec{v} sono linearmente dipendenti allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ sostituendo queste coordinate nella matrice si ottiene

$$\begin{pmatrix} \lambda v_x & \lambda v_y & \lambda v_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

è facile vedere che tutte le matrici 2×2 hanno determinante nullo e dunque la matrice ha rango inferiore a 2.

Quindi abbiamo dimostrato che se la matrice ha rango 2 allora i vettori sono linearmente indipendenti.

Il viceversa si dimostra prendendo due vettori tali che la matrice corrispondente abbia rango inferiore a due e si fa vedere che le coordinate dei due vettori sono proporzionali e dunque i vettori sono linearmente dipendenti. **(farlo!)**

Prodotto scalare.

Sia \vec{u} il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e \vec{v} il vettore di coordinate (v_x, v_y, v_z) , definiamo **prodotto scalare** di \vec{u} e \vec{v} , e useremo la notazione $\vec{u} \cdot \vec{v}$, nel seguente modo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Si osservi che il prodotto scalare di due vettori è uno scalare (cioè un numero reale).

Si osservi inoltre che:

$$\vec{u}^2 := \vec{u} \cdot \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = |\vec{u}|^2.$$

In generale vale la seguente uguaglianza

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \gamma$$

dove γ è l'“angolo” tra i due vettori. Da questa uguaglianza è facile dimostrare le seguenti proposizioni (farlo per esercizio).

Proposizione 1.3 *Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori non nulli siano ortogonali è che sia nullo il loro prodotto scalare.*

Proposizione 1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni coppia di vettori dello spazio \vec{u} e \vec{v} vale la seguente disuguaglianza: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$. L'uguaglianza è verificata solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.*

Prodotto vettoriale.

Sia \vec{u} il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e \vec{v} il vettore di coordinate (v_x, v_y, v_z) , definiamo **prodotto vettoriale** di \vec{u} e \vec{v} , e usiamo la notazione $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il vettore seguente

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := (u_y v_z - u_z v_y, -u_x v_z + u_z v_x, u_x v_y - u_y v_x). \quad (1.2)$$

Si osservi che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è il determinante “formale” sviluppato lungo la prima riga della seguente matrice “formale”

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà

Proposizione 1.5 *Siano \vec{u} e \vec{v} due vettori non nulli:*

1. *condizione necessaria e sufficiente affinché $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ è che \vec{u} e \vec{v} siano linearmente dipendenti.*
2. *se $\vec{u} \wedge \vec{v}$ non è nullo allora è un vettore ortogonale sia al vettore \vec{u} che al vettore \vec{v} .*
3. *se $\vec{u} \wedge \vec{v}$ non è nullo, $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ è uguale all'area del parallelogramma costruito sui vettori \vec{u} e \vec{v} .*

Dimostrazione

1 Supponiamo che \vec{u} e \vec{v} siano linearmente dipendenti, cioè che esista $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, quindi $u_x = \lambda v_x$, $u_y = \lambda v_y$ e $u_z = \lambda v_z$. sostituendo queste tre uguaglianze in (1.2) si vede che allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\lambda(v_z v_y - v_y v_z), \lambda(-v_x v_z + v_z v_x), \lambda(v_x v_z - v_z v_x)) = \vec{0}.$$

Viceversa se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, allora in particolare

$$u_y v_z = u_z v_y$$

$$u_x v_z = u_z v_x$$

$$u_x v_y = u_y v_x$$

Siamo nell'ipotesi che i due vettori siano non nulli quindi supponiamo per esempio che $u_y \neq 0$ allora dividiamo la prima e la terza uguaglianza per u_y :

$$v_z = \frac{v_y}{u_y} u_z$$

$$v_x = \frac{v_y}{u_y} u_x$$

infine chiaramente vale

$$v_y = \frac{v_y}{u_y} u_y$$

quindi se scegliamo $\lambda = \frac{v_y}{u_y}$ abbiamo dimostrato che $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, cioè \vec{u} e \vec{v} sono linearmente dipendenti.

2. Per dimostrare che \vec{u} e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sono ortogonali basta verificare che $\vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$. Ora basterà sviluppare questa formula usando la definizione di prodotto scalare e prodotto vettoriale. (Farlo per esercizio).

Non diamo la dimostrazione di **3**.

Infine è facile verificare la seguente uguaglianza

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Equazioni parametriche della retta.

L'equazione vettoriale della retta r passante per il punto P_o e avente come vettore direttore \vec{u} è data da $P_o\vec{P} = t\vec{u}$ e può essere espressa in termini di coordinate. Se \vec{u} è il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e P_o il punto di coordinate (x_o, y_o, z_o) , il generico punto $P = (x, y, z)$ della retta r deve soddisfare

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = u_x t \\ y - y_o = u_y t \\ z - z_o = u_z t. \end{cases}$$

Queste equazioni sono dette equazioni parametriche della retta. Ad ogni punto di r corrisponde uno specifico valore t , ad ogni valore di t corrisponde uno specifico punto di r .

Se cerchiamo le equazioni parametriche di una retta passante per due punti $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ allora il vettore direttore è dato dal vettore $P_o\vec{P}_1$ di coordinate $(x_o - x_1, y_o - y_1, z_o - z_1)$. Le equazioni parametriche diventano

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = (x_o - x_1)t \\ y - y_o = (y_o - y_1)t \\ z - z_o = (z_o - z_1)t. \end{cases}$$

Equazioni parametriche dei piani.

Possiamo, in modo analogo, dall'equazione vettoriale del piano π avente per giacitura i vettori $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e passante per il punto

$P_o = (x_o, y_o, z_o)$ data da $P_o\vec{P} = s\vec{u} + t\vec{v}$ possiamo ottenere le equazioni per le coordinate:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = u_x s + v_x t \\ y - y_o = u_y s + v_y t \\ z - z_o = u_z s + v_z t. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche del piano π . Ad ogni punto di π corrisponde una specifica coppia di valori t e s , ad ogni coppia di t e s corrisponde uno specifico punto di π .

Siano P_o, P_1 e P_2 tre punti **non allineati** dello spazio (cioè tali che non giacciono sulla stessa retta e dunque tali che i vettori $P_o\vec{P}_1$ e $P_o\vec{P}_2$ siano linearmente indipendenti). I tre punti individuano una giacitura: $P_o\vec{P}_1$ e $P_o\vec{P}_2$, quindi per trovare le equazioni parametriche del piano π passante per tre punti P_o, P_1 e P_2 basterà sostituire i vettori \vec{u} e \vec{v} con i vettori $P_o\vec{P}_1$ e $P_o\vec{P}_2$.

Vettori linearmente dipendenti Abbiamo già visto che due vettori \vec{u} e \vec{v} sono linearmente dipendenti se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e che questo è equivalente a chiedere che il rango della matrice delle loro coordinate è 1 cioè il rango è inferiore al rango massimo che sarebbe 2.

Tre vettori \vec{w}, \vec{u} e \vec{v} sono **linearmente dipendenti** se uno di questi vettori può essere scritto come combinazione lineare degli altri due e.g.: $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$ per qualche $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

In particolare si osservi che questo significa che tre vettori sono linearmente dipendenti se sono complanari, cioè se i tre vettori sono contenuti in uno stesso piano.

Proposizione 1.6 *Tre vettori \vec{w}, \vec{u} e \vec{v} sono linearmente dipendenti se e solo se la matrice delle coordinate non ha rango massimo cioè*

$$\det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = 0.$$

Tré vettori che non siano linearmente dipendenti sono detti **linearmente indipendenti**.

Equazioni cartesiane dei piani nello spazio. Consideriamo il piano π di equazioni parametriche:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = u_x s + v_x t \\ y - y_o = u_y s + v_y t \\ z - z_o = u_z s + v_z t. \end{cases}$$

Siccome i vettori \vec{u} e \vec{v} sono linearmente indipendenti, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

si può estrarre una sottomatrice 2×2 che abbia determinante diverso da zero, supponiamo che sia la matrice $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$. Consideriamo le prime due equazioni del sistema di equazioni parametriche e risolviamo le equazioni in s e t . Si ottiene

$$s = \frac{(x-x_o)v_y - (y-y_o)v_x}{u_x v_y - u_y v_x}$$

$$t = \frac{(y-y_o)u_x - (x-x_o)u_y}{u_x v_y - u_y v_x}$$

sostituendo questi valori nella terza equazione si ottiene:

$$(u_x v_y - u_y v_x)(z - z_o) = (x - x_o)(v_y u_z - u_y v_z) + (y - y_o)(u_x v_z - u_z v_x)$$

cioè

$$(x - x_o)(v_y u_z - u_y v_z) + (y - y_o)(u_x v_z - u_z v_x) + (z - z_o)(u_y v_x - u_x v_y) = 0. \quad (1.4)$$

Prima di continuare osserviamo che se chiamiamo

$$a = v_y u_z - u_y v_z, \quad b = u_x v_z - u_z v_x, \quad c = u_y v_x - u_x v_y,$$

$$d := x_o(v_y u_z - u_y v_z) + y_o(u_x v_z - u_z v_x) + z_o(u_y v_x - u_x v_y)$$

l'equazione diventa:

$$ax + by + cz = d.$$

Questa è l'equazione cartesiana del piano π .

Cerchiamo di capire il **significato geometrico** di (1.4).

1. Consideriamo il vettore \vec{w} avente come coordinate i coefficienti di x , y e z cioè il vettore $\vec{w} = (v_y u_z - u_y v_z, u_x v_z - u_z v_x, u_y v_x - u_x v_y)$. È immediato vedere che $\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u}$. Quindi per le proprietà viste sul prodotto vettoriale \vec{w} è un vettore ortogonale sia a \vec{u} che a \vec{v} .
2. Se P è il generico punto del piano π allora il vettore $P_o \vec{P} = ((x - x_o), (y - y_o), (z - z_o))$ è il generico vettore del piano π .
3. L'equazione (1.4) diventa vettorialmente:

$$P_o \vec{P} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}) = 0 \quad (1.5)$$

cioè il generico vettore del piano è ortogonale al vettore $\vec{v} \wedge \vec{u}$. In altre parole il piano π è costituito di tutti i punti P tali che il vettore $P_o \vec{P}$ è ortogonale al vettore $\vec{v} \wedge \vec{u}$. (1.5) è un'altra equazione vettoriale che caratterizza i punti del piano π .

Si ricorda inoltre che l'uguaglianza (1.3) implica che

$$0 = P_o \vec{P} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}) = \det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}.$$

Questa formula è molto comoda per trovare l'equazione del piano.

Abbiamo visto quindi che un piano può essere caratterizzato da un'equazione del tipo $ax + by + cz = d$. Ora vogliamo vedere il viceversa cioè che: *Dati a, b e $c \in \mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli, e $d \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti P di coordinate (x, y, z) che verificano l'equazione*

$$ax + by + cz = d \quad (1.6)$$

è un piano.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $a \neq 0$. Dunque l'equazione (1.6) può essere riscritta

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z + \frac{d}{a}$$

oppure equivalentemente

$$\begin{cases} x - \frac{d}{a} = -\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t \\ y = s \\ z = t. \end{cases} \quad (1.7)$$

Se consideriamo il vettore $\vec{u} = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$, il vettore $\vec{v} = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ e il punto $P_o = (\frac{d}{a}, 0, 0)$ allora l'equazione (1.7) scritta in forma vettoriale diventa:

$$P_o\vec{P} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Dunque effettivamente l'equazione (1.6) determina il piano passante per il punto P_o e avente per giacitura \vec{u} e \vec{v} .

Si osservi inoltre che se fissiamo P_o un punto di coordinate (x_o, y_o, z_o) che verifica (1.6) cioè $ax_o + by_o + cz_o = d$ e se sostituiamo questa espressione di d nell'equazione (1.6) otteniamo:

$$ax + by + cz = ax_o + by_o + cz_o.$$

Questo equivale a scrivere

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

Quindi se $\vec{w} = (a, b, c)$, l'insieme dei punti che risolve (1.6) verifica $P_o\vec{P} \cdot \vec{w} = 0$ dunque (a, b, c) è un vettore **ortogonale** al piano.

Equazione cartesiana delle rette. Sia r la retta passante per il punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ avente come vettore direttore \vec{u} di coordinate (u_x, u_y, u_z) . Abbiamo visto che le equazioni parametriche della retta sono date da:

$$\begin{cases} x - x_o = u_x t \\ y - y_o = u_y t \\ z - z_o = u_z t. \end{cases}$$

Siccome \vec{u} è non nullo, almeno una delle tre coordinate è non nulla, supponiamo che si abbia $u_x \neq 0$. Allora la prima equazione diventa: $t = \frac{x-x_o}{u_x}$. Sostituendo questo valore nelle altre due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} y - y_o = \frac{x-x_o}{u_x} u_y \\ z - z_o = \frac{x-x_o}{u_x} u_z \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} (x - x_o)u_y - (y - y_o)u_x = 0 \\ (x - x_o)u_z - (z - z_o)u_x = 0. \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni cartesiane della retta r . Si osservi in particolare che ognuna delle due equazioni determina un piano. Quindi la retta r non è altro che l'intersezione di questi due piani.

In generale dati due piani π e π' di equazioni cartesiane rispettivamente

$$ax + by + cz = d$$

e

$$a'x + b'y + c'z = d',$$

tali che i due vettori (a, b, c) e (a', b', c') siano linearmente indipendenti, il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases}$$

determina l'**equazione cartesiana** di una retta r .

Per caratterizzare geometricamente la retta è sufficiente osservare che il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano π e dunque alla retta r e che il vettore (a', b', c') è ortogonale al piano π' e dunque alla retta r . Se ne deduce che *il vettore direttore della retta r è un vettore ortogonale sia al vettore (a, b, c) che al vettore (a', b', c') . Per ottenere tale vettore basta considerare $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$. Per ottenere un punto della retta basta invece fissare una delle tre coordinate e risolvere il sistema delle equazioni cartesiane per le due coordinate rimanenti.*

Posizioni relative di rette e piani. Sia π il piano di equazione $ax + by + cz = d$ e sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \end{cases}$$

Se cerchiamo l'insieme dei punti di intersezione di π e r dobbiamo mettere a sistema queste equazioni e otteniamo:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

Chiaramente ci sono vari casi possibili:

Primo caso: Il rango della matrice dei coefficienti è 3 cioè

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

In questo caso il sistema di equazioni ammette come soluzione un'unica terna che determina l'unico punto di intersezione di r e π : $r \cap \pi = \{P_o\}$, si dice che r e π sono **incidenti**.

Secondo caso: Il rango della matrice dei coefficienti è 2 cioè

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ci sono allora due sotto casi:

Primo sotto caso: Il rango della matrice completa è anche 2 cioè

$$\det \begin{pmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{pmatrix} = 0.$$

In questo caso per il Teorema di Rouché Capelli il sistema ammette ∞^1 soluzioni e dunque si avrà che la retta r è contenuta in π : $r \cap \pi = r$.

Primo sotto caso: Il rango della matrice completa è 3. Allora per il Teorema di Rouché Capelli il sistema non ammette soluzioni e dunque π e r sono **parallele**.

Posizioni relative di due rette.

Diremo che due rette sono complanari se esiste un piano che le contenga tutte e due. In caso contrario diremo che le rette sono sghembe. Vediamo quando due rette sono complanari.

Siano P_o e P_1 due punti della retta r e siano P_2 e P_3 due punti della retta s . r e s sono contenute in uno stesso piano π se e solo se i quattro punti P_o, P_1, P_2 e P_3 appartengono allo stesso piano π . Dunque se e solo se i tre vettori $\vec{P_oP_1}, \vec{P_oP_2}, \vec{P_oP_3}$ sono linearmente dipendenti. Dalla proposizione 1.6 questo sarà verificato se e solo se il determinante della matrice delle coordinate di questi tre vettori è nullo.

In modo analogo, se \vec{u} è il vettore direttore di r e se P_o è un punto di r , se \vec{v} è il vettore direttore di s e se P_1 è un punto di s , r e s sono complanari se e solo se $\vec{P_oP_1}, \vec{u}$ e \vec{v} sono linearmente dipendenti. Di nuovo basta dunque verificare che il determinante della matrice delle coordinate di questi tre vettori sia nullo.

Se due rette sono **incidenti** cioè se $r \cap s = \{P_o\}$ allora sono **complanari**. Infatti chiaramente se scelgo come coppia di punti di r : P_o e P_1 e come coppia di punti di s : P_o e P_2 , allora chiaramente i punti P_o, P_1, P_o e P_2 sono solo tre punti e tre punti sono **sempre** complanari.

Se due rette sono **parallele** cioè hanno i vettori direttori linearmente dipendenti allora sono complanari. Infatti in questo caso il determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori $\vec{P_oP_1}, \vec{u}$ e \vec{v} è nullo (dire perché).

E' facile far vedere che due rette r e s rispettivamente di equazione

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$$

sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Due rette che non sono complanari sono sghembe. Dunque due rette sono sghembe se e solo se i loro vettori direttori non sono linearmente dipendenti e se non hanno punti di intersezione.

Proiezioni ortogonali. Sia il vettore \vec{u} di coordinate (u_x, u_y, u_z) e \vec{v} il vettore **unitario** di coordinate (v_x, v_y, v_z) ($|\vec{v}| = 1$).

Siccome $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \gamma = |\vec{u}| \cos \gamma$ dove γ è l'angolo tra \vec{u} e \vec{v} allora $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$ è la lunghezza della componente di \vec{u} nella direzione \vec{v} .

La **proiezione ortogonale** del vettore \vec{u} sul versore \vec{v} è data dal vettore $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$.

Sia r la retta di vettore direttore \vec{w} . Sia \vec{u} un vettore non parallelo a \vec{w} . E' chiaro che r ammette due **versori direttori** $\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$ e $-\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$. Sia \vec{v} il versore direttore di r tale che $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$. La **proiezione ortogonale** di \vec{u} su r è data dal vettore $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$.

Sia ora il piano π di equazione cartesiana $ax + by + cz = d$. Sia \vec{u} un vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) . Si ricorda che il vettore $\vec{w}_1 = (a, b, c)$ è un

vettore ortogonale al piano π . Come prima, esistono due versori ortogonali al piano $\frac{\vec{w}_1}{|\vec{w}_1|}$ e $\frac{-\vec{w}_1}{|\vec{w}_1|}$. Scegliamo \vec{v} il versore ortogonale al piano π tale che $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$. (\vec{v} è il versore che sta dallo stesso lato di π del vettore \vec{u}).

La **proiezione ortogonale** del vettore \vec{u} sul piano π è data dal vettore $\vec{w} := \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$.

Si osservi che questa formula può esser riscritta $\vec{u} = \vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$. In questo modo abbiamo scomposto il vettore \vec{u} nella somma di due vettori ortogonali, uno contenuto nel piano π e l'altro ortogonale al piano π .

Si osservi che

- 1) se \vec{u} è ortogonale al piano π allora è $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} = \vec{u}$ e dunque $\vec{w} = 0$
- 2) se \vec{u} è contenuto nel piano π allora $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} = 0$ e dunque $\vec{w} = \vec{u}$.

Distanza retta punto.

Sia P_1 un punto non appartenente alla retta r . Sia P_o un punto di r . Allora se \vec{v} è il versore direttore della retta r tale che $P_o\vec{P}_1 \cdot \vec{v} \geq 0$, secondo quello visto nel paragrafo precedente $(P_o\vec{P}_1 \cdot \vec{v})\vec{v}$ è la proiezione ortogonale del vettore $P_o\vec{P}_1$ sulla retta r .

Sia P_2 il punto della retta r tale che $P_o\vec{P}_2 = (P_o\vec{P}_1 \cdot \vec{v})\vec{v}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- 1) $P_1\vec{P}_2$ è ortogonale alla retta r .
- 2) $|P_1\vec{P}_2| \leq |P_1\vec{P}|$ per ogni punto P della retta r .

(Per verificare 1) basta verificare che $P_o\vec{P}_2 \cdot P_1\vec{P}_2 = 0$, mentre 2) è vera perchè i cateti sono sempre più corti dell'ipotenusa.)

Da queste due osservazioni pare naturale dare la seguente

Definizione 1.7 *La distanza tra un punto $P_1 \notin r$ e la retta r di vettore direttore \vec{v} è data dalla norma del vettore $|P_1\vec{P}_2|$ dove P_2 è il punto di r tale che $P_1\vec{P}_2$ è ortogonale a \vec{v} .*

Per calcolare tale distanza, scegliamo \vec{v} tale che $|\vec{v}| = 1$ e scegliamo P_o un punto di r . Si ricorda che

$$|\vec{v} \wedge P_o\vec{P}_1| = |\vec{v}|h$$

dove h è l'altezza del parallelogramma costruito sui due vettori \vec{v} e $P_o\vec{P}_1$. Ma dunque $h = |P_1\vec{P}_2|$. Abbiamo ottenuto che

$$d(P_1, r) := |\vec{v} \wedge P_o\vec{P}_1|$$

se $|\vec{v}| = 1$.

Distanza punto piano.

Sia il piano π di equazione $ax + by + cz = d$ e sia $P_1 \notin \pi$. Chiaramente con un ragionamento simile al caso precedente se P_2 è il punto di π tale che $\vec{P_2P_1}$ è ortogonale al piano π allora $|\vec{P_1P_2}| \leq |\vec{P_1P}|$ per ogni punto P del piano π .

Definizione 1.8 *La distanza tra un punto $P_1 \notin \pi$ e il piano π è dato dalla norma del vettore $|\vec{P_1P_2}|$ dove P_2 è il punto di π tale che $\vec{P_1P_2}$ è ortogonale al piano π .*

Si ricorda che il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano π . Il punto P_2 è il punto di intersezione tra la retta passante per P_1 e con vettore direttore (a, b, c) e il piano π .

Tale retta ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases}$$

Per trovare l'intersezione è sufficiente inserire queste equazioni nell'equazione del piano π . Si ottiene

$$a(at + x_1) + b(bt + y_1) + c(ct + z_1) = d.$$

Quindi troviamo che il punto di intersezione P_2 corrisponde al valore del parametro $t = \frac{d - (ax_1 + by_1 + cz_1)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Si osservi inoltre che usando di nuovo le equazioni parametriche della retta:

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (a, b, c)t.$$

Dunque

$$|\vec{P_1P_2}| = |(a, b, c)||t| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}|t|$$

Inserendo il risultato ottenuto per t troviamo

$$d(P_1, \pi) = |\vec{P_1P_2}| = \frac{|d - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Un modo di interpretare questa distanza è di pensare che il piano π_1 parallelo a π e passante per il punto P_1 ha come equazione cartesiana $ax + by + cz = d'$ dove $d' = ax_1 + by_1 + cz_1$. Chiaramente la distanza tra P_1 e π è uguale alla distanza tra i due piani π e π' :

$$d(\pi, \pi') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

2 Esercizi

Esercizio 1 Date le equazioni cartesiane della retta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- i) Trovare un vettore direttore di r
- ii) Dimostrare che r è contenuta nel piano di equazione $3x + 4y = 1$

Esercizio 2 Trovare l'equazione parametrica e cartesiana della retta ortogonale al piano di equazione $2x + y - z = 1$ e passante per il punto $P_o = (-1, 2, 0)$.

Esercizio 3 Sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Determinare a affinché il vettore direttore di r sia ortogonale a $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

Esercizio 4 Sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione $x + ay + 2z = 1$. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $r \cap \pi = \emptyset$.

Esercizio 5 Sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Determinare il piano π contenente r e passante per il punto $(1, 2, 1)$.

Esercizio 6 Determinare le posizioni relative della r la retta di equazione

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

e del piano passante per i punti $P_o = (1, 1, 0)$, $P_1 = (2, -1, 0)$ e $P_2 = (2, 0, 1)$.

Esercizio 7 Determinare le posizioni relative delle due rette r e s rispettivamente di equazione

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(In particolare dire se sono complanari o sghembe e nel primo caso dire se sono parallele o incidenti)

Esercizio 8 Sia π il piano di equazione $2x + y - 2z = 1$. Sia $\vec{u} = (-1, 0, 1)$. Determinare la proiezione ortogonale di \vec{u} sul piano π .

Esercizio 9 Sia r la retta di vettore direttore $(1, -1, 0)$ e passante per il punto $P_o = (2, 3, 4)$. Sia P_1 il punto di coordinate $(1, 4, 3)$. Determinare la distanza di P_1 da r .

Esercizio 10 Sia π il piano di equazione $x + 3z = 1$ e $P_1 = (2, 1, -1) \notin \pi$.
Determinare $d(P_1, \pi)$.

Esercizio 11 Sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -1 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

i) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per il punto $P_0 = (2, 1, -1)$.

ii) Si trovi la retta ortogonale a π e passante per il punto $P_1 = (1, 3, 2)$.

Esercizio 12 Sia $A = (1, 2, 1)$, sia $B = (1, 1, 0)$ e sia $C = (0, -1, 1)$.

i) Verificare che i tre punti non sono allineati.

ii) Sia π_1 il piano contenente A , B e C e sia π_2 il piano di equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 3 + 2t + s \\ z = 1 - t - 2s \end{cases}$$

Dimostrare che i due piani sono paralleli.

iii) Calcolare la distanza tra π e π' .