Matematica II, a.a. 2002/03
Note sui campi vettoriali e le forme differenziali (Bozza).

1 I campi vettoriali.

Un campo vettoriale piano è una funzione

$$\begin{aligned} &F : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x, y) \in I \to F(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j} \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove $F_i : I \to \mathbb{R}$ per $i = 1$ e $i = 2$.

Un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è una funzione:

$$\begin{aligned} &F : I \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &(x, y, z) \in I \to F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k} \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove $F_i : I \to \mathbb{R}$ per $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$.

I è il dominio di definizione del campo vettoriale.

Esempi

1. Il campo gravitazionale: Se la Massa M è nell'origine il campo di forze gravitazionale (cioeè il vettore che in ogni punto rappresenta la forza che viene impressa a una massa puntiforme unitaria dalla gravitazione) è dato da
$$F(x, y, z) = -\frac{kM}{|(x, y, z)|^3}(x, y, z) =$$
$$= -\frac{kMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{kMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{kMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k})$$
Il suo dominio di definizione è $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

2. Il campo di velocità: Data la particella P che si muove sul piano (o nello spazio), in ogni punto della traiettoria possiamo determinare il vettore velocità $\vec{v}(P)$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1$ allora $\nabla f = (f_x, f_y)$ è un campo vettoriale piano, se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1$ allora $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ è un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.1 *Sia F un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ (o piano) se esiste una funzione f tale che $F = \nabla f$ per ogni punto del dominio di definizione allora si dice che F è* **un campo conservativo**, *e $f + C$ con C costante qualsiasi è il* **potenziale** *di F.*

Osservazione 1 Il campo gravitazionale dato nel primo esempio è conservativo e il suo potenziale è dato dalla funzione $f(x, y, z) = \frac{kM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Esercizio Verificarlo!

Osservazione 2 D'altra parte il campo $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ **non** è conservativo. Infatti se esistesse $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = F$ allora in particolare

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases} \tag{1.3}$$

La prima di queste equazioni mi dice che $f(x, y) = -xy + h(y)$ per qualche funzione h derivabile. Ma allora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + h'(y)$$

questo combinato con la seconda delle equazioni da:

$$-x + h(y) = x \text{ i.e. } h(y) = 2x$$

che è **assurdo**
Esercizio Determinare se il campo $F(x, y) = x\vec{i} - y\vec{j}$ è conservativo. Se si determinarne il potenziale.

2 Integrale dei campi vettoriali

Per semplicità chiameremo $P = (x, y, z)$ il generico punto dello spazio $\mathbb{R}^3$. Sia $dP = (dx, dy, dz)$ lo spostamento elementare

Sia $V(P) = f_1(P)\vec{i} + f_2(P)\vec{j} + f_3(P)\vec{k}$ un campo vettoriale. Chiameremo **forma differenziale** F

$$F(P) = V(P) \cdot dP = f_1(P)dx + f_2(P)dy + f_3(P)dz.$$

$F(P)$ è il **lavoro elementare** fatto dal campo vettoriale $V(P)$ per spostare un corpo puntiforme di massa unitaria da P a $P + dP$.

Definizione 2.1 *Se il campo vettoriale è conservativo diremo che la forma differenziale corrispondente è* **esatta**.

Si osservi che se f è il potenziale di V allora il differenziale di f: $df = F$. Si dice che f è la **primitiva** di F (per un'ovvia analogia).

Lo stesso vale per i campi vettoriali piani e per le forme differenziali in $\mathbb{R}^2$.

Per semplicità descriviamo ora l'integrale lungo una curva piana di una forma differenziale (o un campo vettoriale) piana(o) con i dovuti accorgimenti è possibile fare lo stesso discorso nello spazio $\mathbb{R}^3$.

Sia $C(P_1, P_2)$ una curva che congiunge i punti P_1 e P_2 del piano e parametrizzata da $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(a) = P_1$ e $\phi(b) = P_2$, $\phi(t) = (x(t), y(t))$ con $\phi \in C^1$. Sia $F : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$. Supponiamo inoltre che $\phi(t) \in I$ per ogni $t \in [a, b]$ (cioè la curva è contenuta nel dominio di F.)

Definizione 2.2 *L'integrale di F lungo la curva $C(P_1, P_2)$ è dato da:*

$$I := \int_{C(P_1,P_2)} F = \int_a^b f_1(x(t), y(t))x'(t)dt + \int_a^b f_2(x(t), y(t))y'(t)dt$$

Oseervazioni

1. E' facile dimostrare che $\int_{C(P_1,P_2)} F$ non dipende dalla parametrizzazione scelta. Cioè se $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ tale che il supporto di ψ coincide con il supporto di ϕ il valore del integrale non cambia.

2. I è il **lavoro** compiuto dalla forza $V(P) = (f_1, f_2)$ per spostare la particella unitaria da P_1 a P_2 lungo la curva C.

3. Supponiamo che F sia una forma esatta cioè se $F(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Consideriamo ora la funzione f lungo la curva C i.e.

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

allora per la derivazione di funzioni composte è noto che

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t).$$

Quindi considerando la definizione di integrale lungo la curva di F si ottiene:

$$\int_{C(P_1,P_2)} F(x,y) = \int_a^b g'(t)dt$$

usando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(P_2) - f(P_1).$$

Abbiamo ottenuto il seguente Teorema:

Torema 2.3 *L'integrale di F, forma differenziale* **esatta**, *lungo una curva C che congiunge P_1 e P_2 dipende solo dal valore della primitva negli estremi.*

Esempio: Sia la curva C_1 parametrizzata da $\phi_1(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 2]$. Sia C_2 la curva parametrizzata da $\phi_2(t) = (2t, 4\sqrt{(t)})$ con $t \in [0, 1]$. Sia $F(x, y) = xdx - ydy$. Si osservi che i punti iniziali e finali di C_1 e C_2 coincidono e sono rispettivamente$P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (2, 4)$. **Esercizio** *Calcolare usando la definizione* $\int_{C_1} F$ e $\int_{C_2} F$. Dire perché questi risultati non sono sorprendenti.

Considerare ora la forma differenziale $G(x, y) = ydx - xdy$, calcolare $\int_{C_1} G$ e $\int_{C_2} G$!

3 Forme chiuse

Sia $F : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $F(x, y) = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$ tale che $f_i \in C^1(I)$ per $i = 1$ e $i = 2$.

Definizione 3.1 *Se $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in I$ allora diremo che $F(x, y)$è una forma* **chiusa** *in I.*

Esempio 0 $F(x,y) = xdx - ydy$ è chiusa.

Esempio 1 Se F è esatta in I allora è chiusa. Infatti se F è esatta allora $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ e

$$F(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Chiaramente si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

mentre

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

ora per il Teorema di Schwarz i lati destra delle disuguaglianze coincidono e dunque F è chiusa.

Torema 3.2 *Una forma differenziale di classe C^1 in un* **rettangolo** *di $\mathbb{R}^2$ è chiusa se e solo se è esatta.*

Osservazione La classe di domini in cui vale questo Teorema è molto più vasta dei rettangoli, tuttavia si osservi che in generale non è vero che le forme chiuse sono esatte infatti

$$F(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma non è esatta! **Esercizio** *Verificare questa affermazione.*