Matematica I, I. Birindelli/A. Garroni

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}, \quad \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

2. Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x - |x^2 - 2x - 3| \geq 0$$

3. Determinare l'insieme dei punti di discontinuità della funzione $f(x) = (x-1)[x]$
4. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione cotan$x = x$ nell'intervallo $(0, \pi)$. (Facoltativo: Dimostrare che esistono infinite soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}$).
5. Dimostrare che il polinomio $g(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ ha almeno due radici reali.
6. Dimostrare che l'equazione $\cos x = x$ ha una soluzione nell'intervallo $[0, \pi/2]$.
7. Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$2(\sin x)^2 - 3\sin x - 2 = 0$$

8. Dimostrare che esiste un numero reale $x \in (-6, -2)$ che risolve l'equazione

$$e^x + x + 2 = 0$$

9. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione

$$4x^2 - e^x = 0$$

nell'intervallo $[0, 1]$.

10. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $\cos(3x) = x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
11. Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$|\text{tg}2x| < 1$$

12. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad f_2(x) = e^{x\text{tg}x}$$

$$f_3(x) = (\log x)^3, \quad f_4(x) = \frac{x^p}{x^m - a^m}$$

13. Calcolare la derivata in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{per } x > 0 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

14. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in 1 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & x > 1 \\ ax + 2b & x \leq 1 \end{cases}$$

15. Determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto, e gli intervalli di monotonia per le seguenti funzioni considerate nei loro insiemi di definizione: $f(x) := x + 1/x$, $g(x) := \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, $k(x) := 2x + \frac{1}{x^2}$.

16. Sia $f(x) = \cos ax$, con $a \in \mathbb{R}$. Trovare l'espressione della derivata n-esima di f in un generico punto x.

17. Determinare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = x - [x]$ ([x]=parte intera di $x = n \in N$ tale che $n \leq x$ e $n + 1 > x$).

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+3} & x > 2 \\ ax^2 - bx + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che f sia una funzione continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

19. (*) Siano f e g due funzioni continue in un intervallo $[a, b]$. Dimostrare che la funzione $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è continua. (Dimostrare prima che $h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$, e usare poi le proprietà delle funzioni continue.)

20. (*) Determinare se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $g(x) = \frac{x+a}{2x^2+3x+1}$ abbia una discontinuità eliminabile in $x = -1$.

21. Si consideri la funzione f definita, per $x \in (0, \pi)$, da

$$f(x) = \begin{cases} e^{\tan x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determinare se f è continua in $\frac{\pi}{2}$.

22. Calcolare la derivata in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{per } x > 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

23. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{per } x > 1 \\ ae^{x-1} & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia continua in 1. (Facoltativo: Determinare se f e' derivabile in 1.)

24. Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2+2} & x > 1 \\ ax^2 + b & x \leq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in 1.

25. (*) Sia G il grafico della funzione $f(x) = 4x^3$. Determinare l'equazione di una retta passante per il punto $(0, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) e tangente a G.

26. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{2x^2+3x-2} & x \neq -2 \\ 4 & x = -2 \end{cases}$$

abbia una discontinuità eliminabile in -2.

27. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq a \\ x + 4 & x < a, \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$.

28. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+3}$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non) e disegnare il grafico).

29. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non) e disegnare il grafico).

30. Studiare il grafico della funzione $f(x) = x - \sqrt{x+5}$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non) e disegnare il grafico).

31. Studiare il grafico della funzione $f(x) = 2\log|2x-3|$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), punti di discontinuità e disegnare il grafico).

32. Studiare il grafico della funzione $f(x) = 2\sqrt{|2x-3|}$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non) e punti di discontinuità e disegnare il grafico).

33. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log(x^2 - 2x - 1)$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non) e disegnare il grafico).

34. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non) e disegnare il grafico).

35. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log|2x+1| + \frac{2x}{|x|}$ (determinare insieme di definizione,asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), punti di discontinuità e disegnare il grafico).

36. Studiare il grafico della funzione $f(x) = e^{x+|x^2-1|}$ (determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), punti angolosi, convessità e disegnare il grafico).

37. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2x+3}{|x^2-1| + x^2}$$

In particolare determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, i punti di massimo o minimo (locali e non), punti angolosi e disegnare il grafico.

38. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{x^2+1} - x)$ (determinare: insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, e disegnare il grafico).

39. Studiare il grafico della funzione (determinare: insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo e disegnare il grafico)

$$g(x) = \sin x + \cos x$$

Inoltre determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(0, g(0))$.

40. Studiare il grafico della funzione (determinare: insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo e disegnare il grafico)

$$g(x) = \log(\sin x).$$

Inoltre , determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\frac{\pi}{4}, g(\frac{\pi}{4}))$.

41. Studiare il grafico della funzione (determinare: insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo e disegnare il grafico)

$$g(x) = \log(\cos x).$$

In particolare, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\frac{\pi}{4}, g(\frac{\pi}{4}))$. (suggerimento: usare l'esercizio precedente e una relazione tra il seno e il coseno).

42. Studiare il grafico della funzione (determinare: insieme di definizione, asintoti insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, e disegnare il grafico) $g(x) = e^{-x^3+3x^2}$. In particolare determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di coordinate $(2, g(2))$.

43. Studiare il grafico della funzione (determinare: insieme di definizione, asintoti insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, e disegnare il grafico)

$$f(x) = e^{-x-|x^2-x-2|}.$$

44. Studiare il grafico della funzione (determinare: insieme di definizione, asintoti insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, e disegnare il grafico)

$$f(x) = e^{-x}\left(\log|x| + \frac{x}{|x|}\right)$$