Matematica I,TAC

1. Studiare il grafico cioe‘:

   determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di discontinuità, punti angolosi, punti di massimo o minimo (locali e non) e **disegnare il grafico** e una retta tangente in un punto significativo)

   delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+3}, \quad f_1(x) = 2\log|2x-3|, \quad f_3(x) = 2\sqrt{|2x-3|}, \quad f_4(x) = x - \sqrt{x+5}$$

$$h(x) = \log(x^2 - 2x - 1), \quad h_1(x) = \log\left(\frac{x+1}{2x-3}\right), \quad h_2(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$k(x) = e^{x+|x^2-1|}, \quad k_1(x) = \frac{2x+3}{|x^2-1|+x^2}, \quad k_2(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$g(x) = \sin x + \cos x, \quad g_1(x) = \log(\sin x), \quad g_2(x) = e^{-x^3+3x^2}.$$

2. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_o = 0$ delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log(1+x), \quad g(x) = \frac{e^x}{1+x}, \quad h(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

   Grazie al polinomio di Taylor, determinare $f(0.1)$ e $g(0.1)$ approssimati con una cifra dopo la virgola.

3. Disegnare il grafico di $f(x) = e^x$, della retta tangente ad f in 0 e della funzione $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

4. Grazie al polinomio di Taylor calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{\sin x^4}$.

   (Suggerimento: Calcolare il polinomio di Taylor di $\sin x$, Dedurne quello di $\sin^4 x$.)

5. Sia $f(x) = \arctan x$. Dimostrare che $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tenendo conto che $(\tan t)' = 1 + \tan^2 t$. Calcolare $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, dimostrare che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per $x > 0$. ($\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$)

6. Sia $f(x) = det \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ x & 2 & 1 \\ -2 & x & 1 \end{pmatrix}$. Studiare il grafico di f, dedurne che per ogni x tale che $|x| \geq 2$, il rango della matrice è 3. Dimostrare che esiste $x \in (1,2)$ tale che il rango della matrice è 2, dimostrare che in $\mathbb{R}$ esistono esattamente tre x tali che il rango della matrice è 2.

7. Sia $f(x) = x^2 - 1$. Dimostrare che esiste una retta contenente il punto $(0, -2)$ che è tangente al grafico di f. Dimostrare che per ogni punto che verifica $y_o > f(x_o)$ nessuna retta del fascio di rette per (x_o, y_o) è tangente alla funzione f.

Buon anno!