Matematica I, I. Birindelli

1. Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}, \qquad g(x) = \log(2^x - 2), \qquad h(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3}{x-2}\right)}, \qquad k(x) = \sqrt{\sin(2x)}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}, \quad \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

3. Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x - |x^2 - 2x - 3| \geq 0$$

4. Determinare l'insieme dei punti di discontinuità della funzione $f(x) = (x-1)[x]$

5. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $\text{cotan}x = x$ nell'intervallo $(0, \pi)$.
   (Facoltativo: Dimostrare che esistono infinite soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}$).

6. Dimostrare che il polinomio $g(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ ha almeno due radici reali.

7. Dimostrare che l'equazione $\cos x = x$ ha una soluzione nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

8. Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$2(\sin x)^2 - 3\sin x - 2 = 0$$

9. Dimostrare che esiste un numero reale $x \in (-6, -2)$ che risolve l'equazione $e^x + x + 2 = 0$.

10. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $4x^2 - e^x = 0$ nell'intervallo $[0, 1]$.

11. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $\cos(3x) = x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

12. Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che $|\text{tg}2x| < 1$.

13. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad f_1(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad f_2(x) = e^{x\text{tg}x}$$

$$f_3(x) = (\log x)^3, \quad f_4(x) = \frac{x^p}{x^m - a^m}$$

    dove $a,\ p,\ m$ sono delle costanti.

14. Calcolare la derivata in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{per } x > 0 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

15. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & x > 1 \\ ax + 2b & x \leq 1 \end{cases} \quad f_1(x) = \begin{cases} e^{-x+3} & x > 2 \\ ax^2 - bx + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

16. Determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto, e gli intervalli di monotonia per le seguenti funzioni considerate nei loro insiemi di definizione: $f(x) := x + 1/x$, $g(x) := \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, $k(x) := 2x + \frac{1}{x^2}$.

17. Determinare se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $g(x) = \frac{x+a}{2x^2+3x+1}$ abbia una discontinuità eliminabile in $x = -1$.

18. (*) Sia G il grafico della funzione $f(x) = 4x^3$. Determinare l'equazione di una retta passante per il punto $(0, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) e tangente a G.

19. Tenedo conto del grafico della funzione $\log(x)$ e la definizione di $|x|$ disegnare il grafico della funzione $f(x) = \log|x+1| + \frac{2x}{|x|}$ In particolare determinare l'insieme di definizione di f.

20. Studiare il grafico cioe':

    determinare insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di discontinuità, punti angolosi, punti di massimo o minimo (locali e non) e **disegnare il grafico** e una retta tangente in un punto significativo)

    delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+3}, \quad f_1(x) = 2\log|2x-3|, \quad f_3(x) = 2\sqrt{|2x-3|}, \quad f_4(x) = x - \sqrt{x+5}$$

$$h(x) = \log(x^2 - 2x - 1), \quad h_1(x) = \log\left(\frac{x+1}{2x-3}\right), \quad h_2(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$k(x) = e^{x+|x^2-1|}, \quad k_1(x) = \frac{2x+3}{|x^2-1|+x^2}, \quad k_2(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$g(x) = \sin x + \cos x, \quad g_1(x) = \log(\sin x), \quad g_2(x) = e^{-x^3+3x^2}.$$

21. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^2 x^2 - 3x dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) dx, \quad \int_0^2 e^{3x} dx,$$

$$\int_{-1}^2 xe^{2x} dx, \quad \int_0^2 |x-1| dx, \quad \int_0^3 x(x^2-1)^3 dx, \quad \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

22. Sia $F(x) = \int_0^{3x} \sin(t^2 + \frac{\pi}{2}) dt$. Calcolare $F(0)$. Determinare $F'(x)$.

Buon anno!