Corso di Laurea TAC . Matematica 1. Birindelli- Garroni

PROVA SCRITTA del 20 giugno 2005

Cognome: .... **Nome**: ....

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ determinare le coordinate dei vettori

$$\vec{w} = |\vec{u} + \vec{v}|\vec{u}, \quad \vec{z} =< \vec{u}, \vec{v} > \vec{v}$$

b) Determinare tutti vettori ortogonale a $\vec{u}$ di lunghezza 5.

Risposta:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{\frac{101}{4}}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{101}{4}} \\ 2\sqrt{\frac{101}{4}} \end{pmatrix}$.

$< \vec{u}, \vec{v} >= -3 + 6 = 6$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix}$.

b)*un vettore* $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ *è ortogonale a* $\vec{u}$ *se e solo se:* $< \vec{u}, \vec{w} > - = 0$ *cioè* $\frac{3}{2}w_x + 2w_y = 0$, $w_y = -\frac{3}{4}w_x$. *Affinchè* $|\vec{w}| = 5$ *è necessario che* $w_x^2 + w_y^2 = 25$. *Sostituendo otteniamo*

$$w_x^2 + \frac{9}{16}w_x^2 = 25, \quad \frac{25}{16}w_x^2 = 25, \quad w_x^2 = 16.$$

Quindi, ci sono due possibili vettori $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ *o* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. a) Determinare l'equazione cartesiana di Π piano dello spazio passante per i tre punti $P_o = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$.

b) Determinare per quali $a \in \mathbf{R}$ il punto $P_3 = (a, 2, -3)$ appartiene al piano Π, determinare se la retta di equazione $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$ è parallela al piano Π

Risposta:

a)$P = (x, y, z)$ *appartiente al piano* Π *se* $\vec{P_oP}$, $\vec{P_oP_1}$, $\vec{P_oP_2}$, *sono linearmente dipendenti cioè se il determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è zero:*

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x-1) - y(-1) + z(1) = 0, \quad x + y + z = 1.$$

b) $P_3 \in \Pi$ *se le sue coordinate soddisfano l'equazione trovata:*

$$a + 2 - 3 = 1, \quad a = 2.$$

Il vettore direttore della retta è dato facendo il prodotto vettoriale tra i vettori che hanno come coordinate i coefficenti della retta $\vec{r} = (2, 1, -1) \wedge (1, 2, 4) = (6, -9, 3)$. *La retta è parallela al piano se il vettore direttore è ortogonale al vettore ortogonale al piano cioè* $(1, 1, 1)$.

Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, siccome $< (6, -9, 3), (1, 1, 1) >= 0$ *si ottiene che la retta è parallela al piano.*

Esercizio 3. Se esistono, determinare tutte le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Risposta:

Siccome il determinante della matrice A dei coefficienti è:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi il rango di A è 3 così come il rango della matrice completa, dunque per il teorema di Rouche' Capelli il sistema ammette una soluzione. Questa è unica perche' il numero di incognite è uguale al rango di A.

Per trovare le soluzioni si può usare il metodo di Kramer o osservare che la terza equazione implica che $x = z$, per poi sostituirlo nelle prime due equazioni che diventano

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 1,\ x = 1$$

Otteniamo dunque come soluzione la terna $(1, 1, 1)$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-1}$

a)Determinare l'insieme di definizione di f

Risposta: *Siccome dobbiamo richiedere che* $x^2 - 1 \neq 0$ *cioè* $x \neq 1$ *e* $x \neq -1$ *l'insieme di definizione è* $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

b) Determinare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+5/x}{x-1/x} = \frac{3}{\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+5/x}{x-1/x} = \frac{3}{\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

c) Determinare gli asintoti della funzione f

Risposta: *Dai limiti ottenuti in b) se ne deduce che* $x = 1$ *e* $x = -1$ *sono due asintoti verticali, mentre* $y = 0$ *è un asintoto orizzontale sia in* $+\infty$ *che in* $-\infty$.

d) Calcolare $f'(x)$

Risposta: *Usando la formula della derivata del rapporto:* $f'(x) = \frac{3(x^2-1)-(3x+5)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}$

e) Determinare gli intervalli di monotonia di f e i punti massimo e minimo locale.

Risposta: *Gli intervalli di monotonia di* f *coincidono con gli intervalli in cui la derivata non cambia segno. Siccome* f' *ha lo stesso segno di* $-3x^2 - 10x - 3$ *otteniamo che*

f' *è negative in* $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$ *quindi* f *m̀onotona decrescente in* $(-\infty, -3)$ *in* $(-\frac{1}{3}, 1)$ *e in* $(1, +\infty)$

viceversa f *è monotona crescente in* $(-3, -1)$ *e in* $(-1, -\frac{1}{3})$.

Se ne deduce che $f(-3) = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ *è un minimo locale mentre* $f(-1/3) = \frac{4}{1/9-1} = \frac{-9}{2}$ *è un massimo locale.*

f) Determinare l'immagine di f.

Risposta: *Considerando i valori dei massimi e minimi locali e gli intervalli di monotonia di* f *se ne deduce che l'immgine è* $(-\infty, \frac{-9}{2}) \cup (\frac{-1}{2}, +\infty)$.

g) **Disegnare il grafico di f e di $|f|$**

Esercizio 5. a) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \log 2 + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\,.$$

b) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx$.

Risposta:

a) *Usando il fatto che la primitiva di una somma è la somma delle primitive si ottiene:*

$$F(x) = \int f(x)dx = x\log 2 + 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \log|x| + C = x\log 2 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \log|x| + C$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\sin(3x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3}$.