29/10/2021

I

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \in D \longrightarrow f(x,y)$$

$z = f(x,y)$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}. \end{aligned}}$$

$\left(f(x,y) = g(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x) \right)$

$\left(f(x,y) = h(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y) \right).$

<u>Esempio</u>: $f(x,y) = x^2 + xy^2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2$

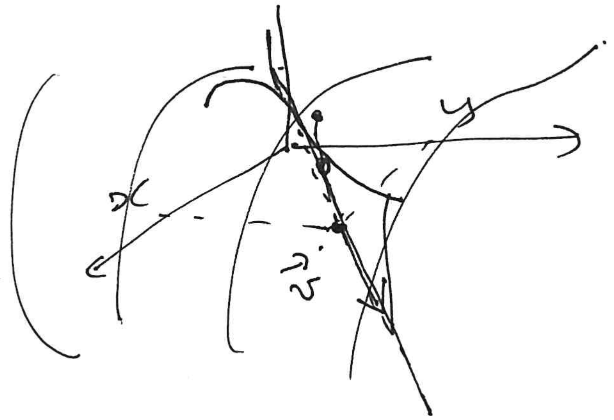
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$

"Gradiente di f"

$$\nabla f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$
$$(x,y) \longrightarrow \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \nabla f(x,y).$$

"Il gradiente in italiano indica la massima pendenza"

<u>Definizione</u> Fissato un vettore unitario $\vec{v}$, si definisce la derivata direzionale, nella direzione $\vec{v}$:



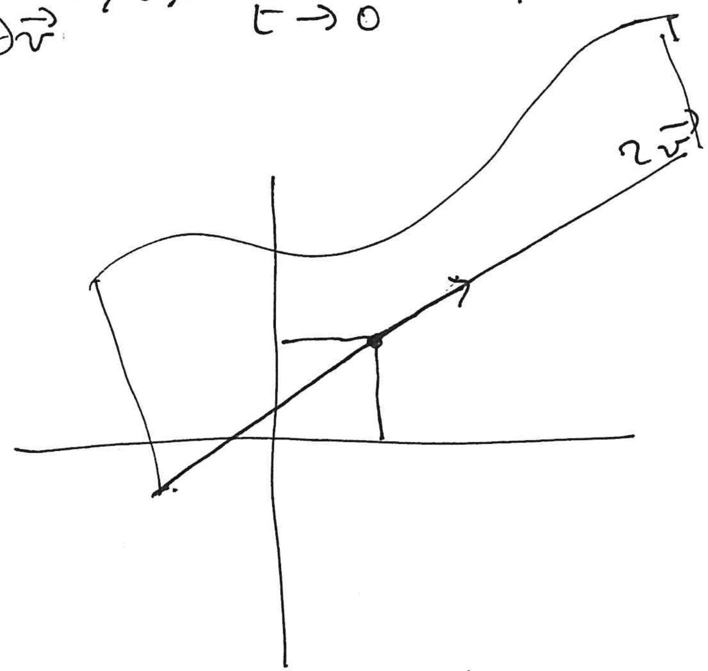
Come si comporta la curva che si ottiene come immagine della retta passante per $(\bar{x}, \bar{y})$ e di direzione $\vec{v}$?

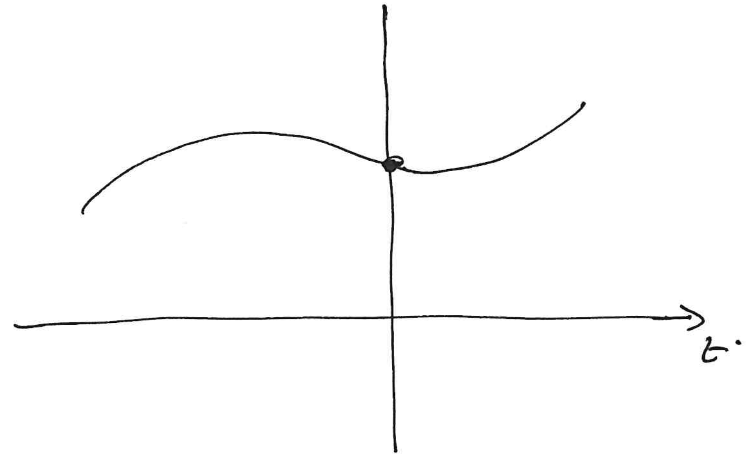
$\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\boxed{r_{\vec{v}}} \begin{cases} x = \bar{x} + t v_1 \\ y = \bar{y} + t v_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t v_1, \bar{y} + t v_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$$

rapporto incrementale nella direzione $\vec{v}$.





Studiamo l'"incremento" della funzione di due variabili ristretta alla retta $r_{\vec{v}}$ cioè che passa per $(\bar{x}, \bar{y})$ nella direzione v.
cioè l'incremento della retta tangente.

III.

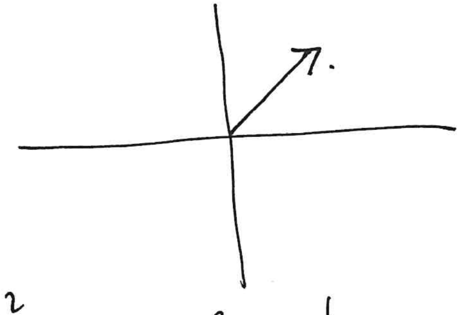
$$g(t) = f(\bar{x}+tv_1, \bar{y}+tv_2). \qquad \frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial \vec{v}} = g'(0).$$

$$g(0) = f(\bar{x},\bar{y}).$$

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+tv_1, \bar{y}+tv_2) - f(\bar{x},\bar{y})}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x},\bar{y})$$

$$|\vec{v}| = 1.$$

$$f(x,y) = x^2 + xy^2. \qquad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad |\vec{v}| = 1.$$



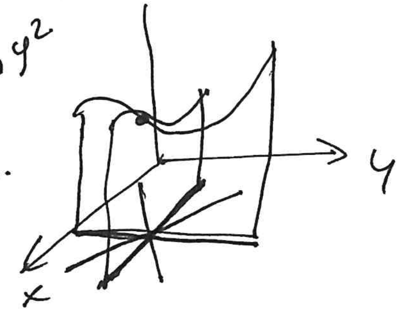
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = g'(0)$$

$$\begin{cases} x = tv_1 = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ y = tv_2 = \frac{t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

x^2 $\quad x$ $\quad y^2$

$$g(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\sqrt{2}}$$



Calcoliamo $g'(t) = t + \frac{3}{2\sqrt{2}}t^2. \Longrightarrow g'(0) = 0 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot 0^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0).$

In un generico $P=(\bar{x},\bar{y})$ $\begin{cases} x = \bar{x}+\frac{t}{\sqrt{2}} \\ y = \bar{y}+\frac{t}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow g(t) = \left(\bar{x}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\bar{x}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(\bar{y}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$

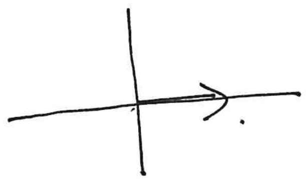
$$g'(t) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\bar{x}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{y}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\bar{x}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(\bar{y}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \to t=0.$$

$$g'(0) = \frac{2}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\bar{x}\bar{y} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x},\bar{y}).$$

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

<u>OSS</u>: Se $\vec{v} = (1,0)$, allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$



Se $\vec{v} = (0,1)$ allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

<u>Teorema</u> Se f è "$\boxed{\text{differenziabile}}$" in (x,y). e $\vec{v}$ è un vettore unitario ($|\vec{v}|=1$) allora se $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \vec{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2.}$$

<u>Definizione</u> f è differenziabile in $(\bar{x},\bar{y})$ se

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} \frac{f(x,y) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-\bar{y}) + f(\bar{x},\bar{y})\right)}{\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}} = 0 .$$

f è differenziabile se e solo se esiste il piano tangente V

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$f(x,y) = x^2 + xy^2$, $\nabla f(x,y) = (2x+y^2,\ 2xy)$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \vec{v} \rangle = (2x+y^2)v_1 + 2xy\, v_2}$$

$\vec{v} = (v_1, v_2) =$

se $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x+y^2) + \frac{2}{\sqrt{2}}xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \vec{v} \rangle = |\nabla f(x,y)|\,|\vec{v}| \cos\alpha = |\nabla f| \cos\alpha.$$

α è l'angolo tra i due vettori

$|\vec{v}| = 1$

<u>Domanda</u> Quale è il valore massimo che può prendere $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y)$?

$\max_{\vec{v}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = |\nabla f|$. cioè quando $\cos\alpha = 1$

cioè $\alpha = 0$ cioè ∇f e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione.

Se vogliamo rimanere sullo stesso livello cioè se cerchiamo $\vec{v}$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = 0 \Longrightarrow \cos\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

$\nabla f \perp \vec{v}$: ∇f è ortogonale alle <u>curve di livello</u>.

OTTIMIZZAZIONE : Ricerca di Massimi e minimi

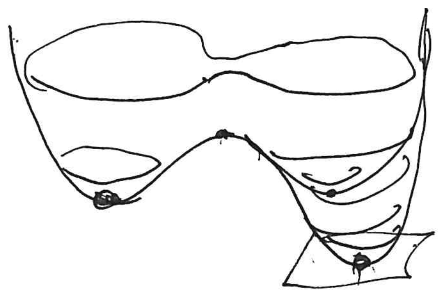
Massimi e minimi assoluti

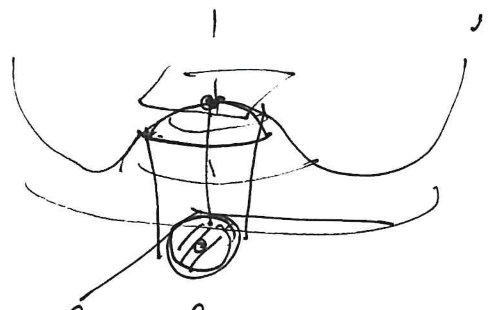
$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

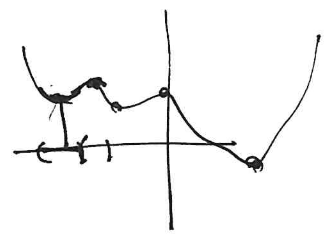
$\max\limits_{D} f = f(\bar{x},\bar{y})$ t.c. $\quad f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall (x,y) \in D.$

$\min\limits_{D} f = f(\underline{x},\underline{y})$ t.c. $\quad f(x,y) \geq f(\underline{x},\underline{y}) \quad \forall (x,y) \in D.$

$(\bar{x},\bar{y})$ è un punto di massimo e $(\underline{x},\underline{y})$ è un punto di minimo.





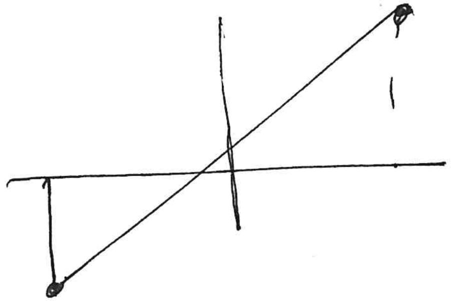


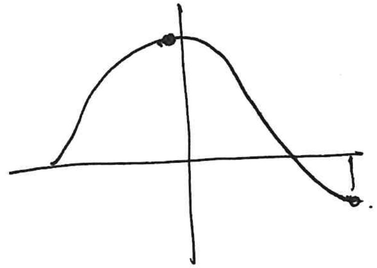
Massimo e minimo locale:

$(\bar{x},\bar{y})$ è un pto di di Massimo locale per f se esiste un intorno $I_\delta(\bar{x},\bar{y})$ t.c. $\forall (x,y) \in I_\delta(\bar{x},\bar{y}) \implies f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y}).$

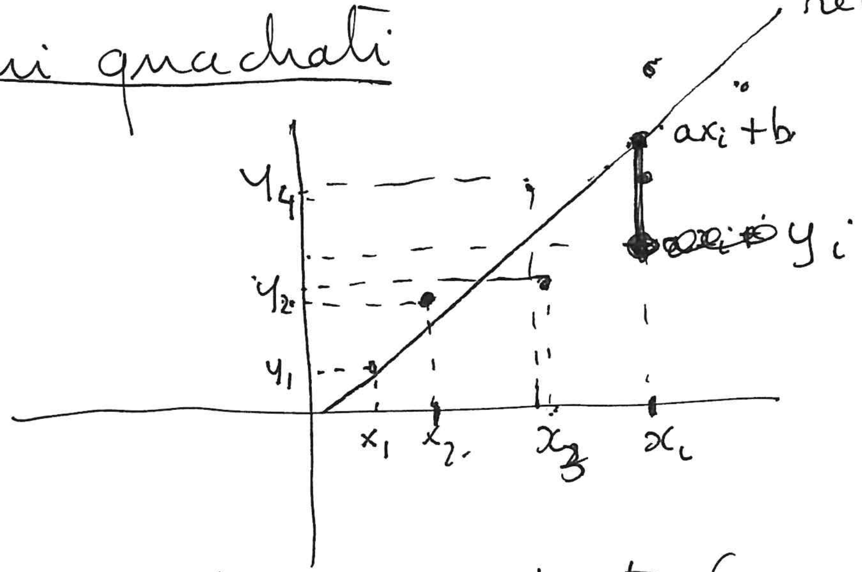
$\shortparallel$

Palla di raggio δ e centro $(\bar{x},\bar{y})$. $\implies (\bar{x},\bar{y})$ è un punto interno al dominio





Minimi quadrati



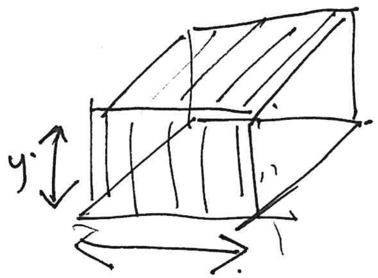
retta di regressione $y = ax+b$.

a ? e b ?

Punti dati di coordinate (x_i, y_i). $\longrightarrow$ Sulla retta $y = a x_i + b$.

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (a x_i + b - y_i)^2.$$

Trovare la retta di regressione cioè a, b che minimizza $f(a,b)$.



Area Tetto x^2

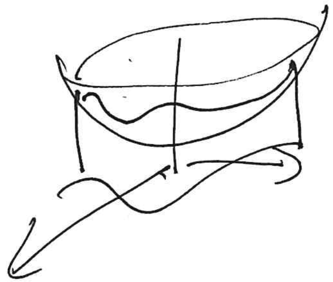
Area Laterale $4xy$ $\Longrightarrow$ Area totale $x^2+4xy = S$.

Volume : $x^2 y$.

$\max\{x^2y$ con $x^2+4xy=S\}$.

$\boxed{y = \frac{S-x^2}{4x}}$

Massimo vincolato

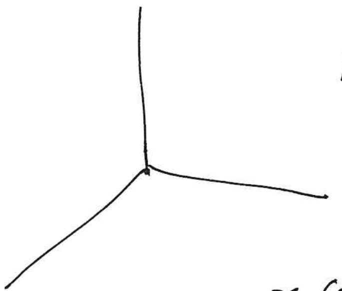


Il vincolo $\boxed{x^2+4xy=S}$

La quantità da massimizzare è il volume $V = x^2 y$

$y = \frac{S-x^2}{4x}$

Volum $\longrightarrow$ Volume $= x^2\left(\frac{S-x^2}{4x}\right) = \frac{x}{4}(S-x^2) = g(x)$.



$\max\limits_{\sqrt{S} \geq x \geq 0} \frac{x}{4}(S-x^2) = \frac{S}{4}x - \frac{x^3}{4}$

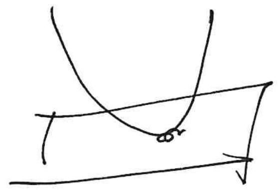
$g'(x) = \frac{S}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$ $\quad x^2 = \frac{S}{3} \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{S}{3}}$

$$y = \frac{S - \frac{S}{3}}{4\sqrt{\frac{S}{3}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot S}{\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{S}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{S} \implies V = \frac{S}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{S}.$$

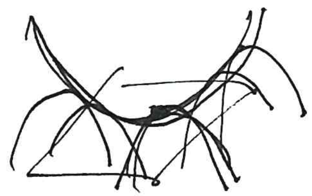
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Teorema di Fermat. Se f ha un punto di massimo o di minimo locale (cioè interno). allora ∇f in quel punto è nullo cioè è un punto critici

OSS Se $\nabla f^{(x_0,y_0)} = 0$ (e la f. è differenziabile) $\Longrightarrow$ Il piano tangente in (x_0,y_0) è parallelo al piano xy, infatti ha equazione $\boxed{z = f(x_0,y_0)}$



ATTENZIONE Non è vero che i punti critici siano per forza dei punti estremali cioè dei punti di massimo o di minimo locale.



$z = x^2 - y^2 = f(x,y)$ $\Longrightarrow$ $\nabla f = (2x, -2y)$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$.

$f(0,0) = 0$. né di massimo perche $f(x,0) = x^2 \geq 0$. né di minimo $f(0,y) = -y^2 \leq 0$.

Se cerchiamo i punti di massimo e di minimo ~~totale~~ locali X li dobbiamo cercare tra i punti critici cioè tra i punti $\nabla f = 0$.

$f(x,y) = x^2 + xy^2$. ha dei punti estremali ?

$\nabla f = (2x+y^2, 2xy) = (0,0)$?

$$\begin{cases} 2x+y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Longrightarrow x=0 \quad o \quad y=0$$

$x=0 \Downarrow y^2=0,\ y=0$. $\qquad y=0 \Downarrow x=0$

$(0,0)$ è l'unico punto critico:

$\boxed{\nabla f(0,0)=0}$ $\qquad f(0,0)=0$

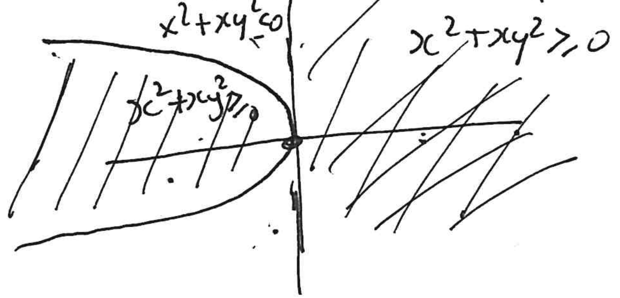
$x=-2y^2$. $\Longrightarrow f(-2y^2,y) = 4y^4 - 2y^4 = 2y^4 \geq 0$.

quindi $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo.

$x^2+xy^2 \geq 0$

$x(x+y^2) \geq 0$

$x+y^2 \geq 0$



XI.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2(ax_i+b-y_i)x_i = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} 2(ax_i+b-y_i) = 0$$

a? e b?

$$\begin{cases} a\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} 2x_i^2\right) + b\sum_{i=1}^{N} 2x_i = 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{N} 2x_i + b\,2N = 2\sum_{i=1}^{N} y_i \end{cases}$$

$P_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ $\quad Q_1 = \sum x_i$ $\quad R_1 = \sum x_i y_i$

$R_2 = \sum y_i$

$$\begin{cases} aP_1 + bQ_1 = R_1 \\ aQ_1 + bN = R_2 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ Q_1 & N \end{pmatrix}$$

con Kramer

$$\boxed{a = \frac{NR_1 - Q_1R_2}{PN - Q_1^2}} \qquad \boxed{b = \frac{PR_2 - Q_1R_1}{PN - Q_1^2}}$$

retta di regressione $y = ax + b$