I

24/11/21

Equazioni del secondo ordine (y''). Forma generale

$$y'' = F(x, y, y').$$

Tratteremo il solo caso delle equazioni lineari, a coef. costanti.

$$\boxed{y'' + \underline{\underline{b}}y' + \underline{\underline{c}}y = f(x)}$$

dove $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ funzione continua.

Il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y'' + \underline{b}y' + \underline{c}y = \underline{f(x)} \\ y(\underline{x_0}) = \underline{y_0} \\ y'(\underline{x_0}) = \underline{y_1} \end{cases}$$

L'incognita è la funzione $\underline{\underline{y(x)}}$.

x_0 è il punto iniziale

$y_0 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ dato iniziale $\quad \uparrow$ Velocità iniziale.

Trovare l'insieme delle soluzioni nel caso $f(x) \equiv 0$

(*) $\boxed{y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0}$

Esempio 1: $y'' + 3y' - 4y = 0$

Esempio 2: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Esempio 3: $y'' + 4y' + 5y = 0$

L'idea è che la funzione $y(x) = e^{\lambda x} > 0$ ha questa proprietà

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$.

$y''(x) = \lambda y' = \lambda^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 y(x)$

$\Downarrow$ Eq. diff.

$$\underbrace{\lambda^2 y}_{y''} + b\underbrace{\lambda y}_{y'} + c\underbrace{y}_{y} = 0$$

$$\underbrace{y}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(\lambda^2 + b\lambda + c)} = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

Equazione caratteristica.

Devo scegliere λ: $\lambda \in \mathbb{R}$

(*) $y'' + by' + cy = 0$, $y = e^{\lambda x} \longmapsto \lambda^2 + b\lambda + c = 0$

1° caso) $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ha due soluzioni distinte $\boxed{b^2 - 4c > 0}$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ oppure $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

$\downarrow$ sostituisco $\qquad\qquad$ $\downarrow$ sostituisco in (*)

$$y_1'' + by_1' + cy_1 = y_1(x) \cdot \underbrace{(\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)}_{0} = 0$$

$$y_2'' + by_2' + cy_2 = y_2 \underbrace{(\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)}_{0} = 0$$

Se $\underline{\underline{y_1}}$ e $\underline{\underline{y_2}}$ sono soluzione dell'equazione $y'' + by' + cy = 0$ allora $\forall C_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall C_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ è soluzione di (*)

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$
$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

$$\Longrightarrow \quad y'' + b y' + c y = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + b\,(C_1 y_1' + C_2 y_2') + \quad \text{bis}$$

$$+ c\,(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$C_1 \underbrace{(y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + C_2 \underbrace{(y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0.$$

$$\boxed{y'' + b y' + c y = 0}$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

CONCLUSIONE Nel caso $\boxed{b^2 - 4c > 0} \Longrightarrow$

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \implies \boxed{\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0} \qquad y(x) = e^{\lambda x} \qquad \text{IV}$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+5}{2} = 1 = \lambda_1 \\[2mm] \dfrac{-3-5}{2} = -4 = \lambda_2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}} \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R},\ \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

$\to y(x) \equiv 0$

$\to y(x) = e^{x}$

$\to y(x) = e^{x} - e^{-4x}$

2° Caso $\boxed{\lambda^2+b\lambda+c=0} \longrightarrow \boxed{b^2-4c=0}$. $c=\frac{b^2}{4}$.

$$\lambda^2+b\lambda+\frac{b^2}{4}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\lambda+\frac{b}{2}\right)^2=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=-\frac{b}{2}}.$$

unica soluzione

$\boxed{y_1(x)=e^{-\frac{b}{2}x}}$ ē soluzione.

$\boxed{y_2(x)=x\,e^{-\frac{b}{2}x}}$ (1) ē soluzione. $y''+by'+cy=0$

$c=\frac{b^2}{4}$

$$\boxed{y''+by'+\frac{b^2}{4}y=0}$$

$$y_2'(x)=e^{-\frac{b}{2}x}+x\cdot e^{-\frac{b}{2}x}\cdot\left(-\frac{b}{2}\right).$$

$$\boxed{y_2'(x)=e^{-\frac{b}{2}x}\left(1-\frac{b}{2}x\right)}. \quad (3)$$

Calcoliamo $y_2''(x)=-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x}+\left(1-\frac{b}{2}x\right)e^{-\frac{b}{2}x}\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)$.

$$\boxed{y_2''(x)=e^{-\frac{b}{2}x}\left(\frac{b^2}{4}x-b\right)}. \quad (2) \rightarrow$$

$$\underbrace{e^{-\frac{b}{2}x}\left(\frac{b^2}{4}x-b\right)}_{y''}+b\overbrace{\left(1-\frac{b}{2}x\right)e^{-\frac{b}{2}x}}^{y'}+\frac{b^2}{4}xe^{-\frac{b}{2}x}=$$

$$= e^{-\frac{b}{2}x}\left(\frac{b^2}{4}x - b + b - \frac{b^2}{2}x + \frac{b^2}{4}x\right) = 0$$

Effettivamente $y_2(x) = x\, e^{-\frac{b}{2}x}$ è soluzione

$\Longrightarrow$ L'insieme delle soluzioni è

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2}x} + C_2 x\, e^{-\frac{b}{2}x}} \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R},\ \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

<u>Esempio</u>: $y'' + 4y' + 4y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$$b^2 - 4c = 16 - 4\cdot 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\boxed{\lambda = -2}$$

L'insieme delle soluzioni

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x\, e^{-2x} \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R},\ \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

3° Caso $b^2 - 4c < 0$ $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

NON HA SOLUZIONI REALI

I numeri complessi $\lambda = \alpha + \beta i$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

→ parte reale

i "immaginario"

$\boxed{i^2 = -1.}$ $\sqrt{-1} = i$

$$\lambda^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + (\beta i)^2 + 2\alpha\beta i$$

$$(\alpha + \beta i)^2 = \underbrace{\alpha^2 - \beta^2} + \underbrace{2\alpha\beta} i$$

• Se $b^2 - 4c < 0$ le soluzioni di $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sono dei numeri complessi

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \cancel{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}$$

$$b^2 - 4c = -\underbrace{(4c - b^2)}_{>0} \Longrightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{-(4c - b^2)}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4c - b^2}}{2}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^2+b\lambda+c=0\\ b^2-4c<0\end{array}\right| \Longrightarrow \quad \lambda=\underbrace{\boxed{-\frac{b}{2}}}_{\text{reale}} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{\text{Imagin}} \in \mathbb{C}$$

Le soluzioni dell'equazione $y''+by'+cy=0$

$$y_1(x)= e^{-\frac{b}{2}x}\sin\left[\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)x\right]$$

$$y_2(x) = \underbrace{e^{-\frac{b}{2}x}}_{\text{Reale}}\cos\left[\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)x\right]$$

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x)=C_1 e^{-\frac{b}{2}x}\sin\left[\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right]+C_2 e^{-\frac{b}{2}x}\cos\left[\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right].$$

EULERO $\quad e^{\beta i}=(\cos\beta+i\sin\beta).$

$$y(x)=(\sin\beta x)' \longrightarrow y'=\beta\cos(\beta x).$$

$$y''(x)=-\beta^2(\sin\beta x)=-\beta^2 y(x) = (i)^2\beta^2 y.$$

$$e^{\alpha+\beta i}=e^{\alpha}e^{\beta i}$$
$$=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)$$

IX.

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \quad \text{E.C.}$$

$$b^2 - 4c = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4 < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\lambda = -2 \pm \frac{\sqrt{4}\, i}{2}} \qquad \sqrt{-1} = i$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4}\, i}{2} = \underbrace{-2}_{\text{Reale}} \pm \underbrace{1i}_{\text{Trig.}}$$

Reale ⇓ exp

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-2x} \sin 1x + C_2 e^{-2x} \cos x} \qquad \forall\, C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO:

$y'' + ky = 0$ $\quad k > 0 \quad k = 1. \quad y'' = -ky$

$$\boxed{y'' + y = 0} \longrightarrow \boxed{\lambda^2 + 1 = 0} \implies \lambda^2 = -1 \implies \lambda = \pm i$$

$$\lambda = 0 \pm 1 \cdot i$$

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.} \qquad e^{0x} = e^0 = 1$$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}, \ \forall C_2 \in \mathbb{R}$

ALTRO ESEMPIO

$y'' + 3y' = 0 \longmapsto \lambda^2 + 3\lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda + 3) = 0$

due soluzioni reali

$\lambda = 0$

$\lambda = -3.$

$$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-3x} = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

ESEMPIO

$y'' + 6y' + 9y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = -3$$

$\boxed{1 \text{ sol.}}$

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13}}{2}$$

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

exp trig.

Reale Im.

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = -\frac{6}{2} \pm \frac{4}{2} i = -3 \pm 2i$$

$$y(x) = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x \qquad \forall\, C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tra tutte le soluzioni cerchiamo quella che soddisfa $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

$$y(0) = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = \boxed{C_1 = 0} \implies y(x) = C_2 e^{-3x} \sin 2x.$$

$$y'(x) = C_2 \left[-3e^{-3x} \sin 2x + e^{-3x} \cos 2x \cdot 2\right] \implies y'(0) = 2C_2 = 1 \implies \boxed{C_2 = \frac{1}{2}}$$

La soluzione del problema di Cauchy è $\boxed{y(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x}$

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Risolvere il problema di Cauchy

$\underline{\overline{XI}}$

Risolviamo $y'' - 2y' - 3y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \begin{cases} 3 \\ -1. \end{cases}$$

2 soluzioni

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \qquad \forall C_1, \ \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

Trovare C_1 e C_2 in modo tale che siano verificate $\boxed{y(0) = 1}$ e $y'(0) = -1$

Calcolare $y(0) = \boxed{C_1 + C_2 = 1}$.

$$y'(x) = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}(-1) \implies y'(0) = \boxed{3C_1 - C_2 = -1.}$$

Incognite sono $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 - C_2 = -1. \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = 0 \implies C_2 = 1.$$

$\boxed{y(x) = e^{-x}}$ soluzione del problema di Cauchy.

$$y'' + by' + cy = f(x) \cdot \quad (*) \qquad f(x) \not\equiv 0 .$$

1°) Tappa è risolvere eq. omogenea $\quad y'' + by' + cy = 0$

$$\Downarrow$$

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$\forall C_1 \in \mathbb{R}, \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

2°) Tappa : Trovare una soluzione particolare $\boxed{y_p}$ Come fare ?

$$y_p'' + by_p' + cy_p = f(x)$$

Allora l'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \forall C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}$$

se mettiamo $y(x)$ in (*) dopo aver calcolato y'', y'

$$\underbrace{y_p'' + by_p' + cy_p}_{= f(x)} + C_1 \underbrace{(y_1'' + by_1' + cy_1)}_{= 0} + C_2 \underbrace{(y_2'' + by_2' + cy_2)}_{= 0} = f(x).$$

Caso 1 ~~f(x) è un espon~~

$f(x)$ è un polinomio. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ di grado n.

$\downarrow$

$y_p(x)$ è un polinomio

$$y'' + 2y' - 3y = x. \implies \left.\begin{array}{l} y_p(x) = a_1 x + a_0 \\ y_p'(x) = a_1 \\ y_p''(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{0 + 2 \cdot a_1 - 3(a_1 x + a_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{y_p''}{0} + 2 \cdot \underset{y_p'}{a_1} - 3\underset{y_p}{(a_1 x + a_0)} = x.$$

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}.}$$

La funzione a sinistra "$\underset{=1}{-3a_1} x \underset{=0}{-3a_0 + 2a_1}$" è uguale alla funzione "x"

$$\left.\begin{array}{l} -3a_1 = 1 \\ 2a_1 - 3a_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{3} \\ -3a_0 = -2a_1 = \frac{2}{3} \end{array}$$

$a_0 = -\frac{2}{9}$

$f(x)$ è un polinomio $\longrightarrow$ Polinomio

$f(x)$ è un esponenziale $\longrightarrow$ exp.

$f(x)$ è una funzione trigonometrica $\longrightarrow$ Trig. sin e cos.

$f(x)$ è prodotto di Polinomio × Exp o × trigonometrica. idem

exp · Trig.

$f(x)$ è polinomio di grado n. $\longrightarrow$ $y_p(x)$ $\longrightarrow$
- pol. di grado n se $c \neq 0$
- " di grado $n+1$ $x \cdot P_n(x)$ se $c=0$ e $b \neq 0$
- " di grado $n+2$ $x^2 P_n(x)$ se $c=0$ e $b=0$

Pol. di grado n

$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ $\longrightarrow$ $y_p(x) =$
- $P_n(x)e^{\alpha x}$ se $e^{\alpha x}$ <u>non</u> è sol. $y''+by'+cy=0$
- $xP_n(x)e^{\alpha x}$ se $e^{\alpha x}$ è sol "
- se $xe^{\alpha x}$ non è sol. "
- $x^2P_n(x)e^{\alpha x}$ se $xe^{\alpha x}$ e $e^{\alpha x}$ sono soluz.