$y' = f(y)\cdot g(x)$ a variabili separabili (Fatto). I

19/11/21

Equazioni differenziali del 1° ordine <u>lineari</u>

$$y' = a(x)y + b(x).$$

<u>1° OSS</u> Caso $\boxed{b(x)\equiv 0} \Longrightarrow \boxed{y' = a(x)y} \Longrightarrow$ variabili separabili

OMOGENEA.

$g(x) = a(x)$ $\quad f(y) = y.$

$$\boxed{y' = xy}$$

Lo possiamo risolvere usando il metodo già visto.

1°) $y(x) \equiv 0$ soluzione costante $(f(y)=0)$.

2°) $y \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{y'}{y} = a(x). \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int a(x)\,dx = A(x) + c$

$a(x)$ sia <u>continua</u>

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx \underset{\substack{s=y(x)\\ ds = y'(x)dx}}{=} \int \frac{1}{s}\,ds = \log|s| = \log|y(x)|$$

3°) $\log|y(x)| = A(x) + c \longmapsto |y(x)| = e^{A(x)+c} = e^c e^{A(x)}$.

$$y(x) = \begin{cases} e^c e^{A(x)} \\ -e^c e^{A(x)}. \end{cases} \longmapsto \boxed{y(x) = C_0 e^{A(x)} \quad \forall C_0 \in \mathbb{R}}$$

L'insieme delle soluzioni

$C_0 = 0 \longmapsto y(x) \equiv 0$

$C_0 > 0 \longmapsto y(x) = e^c e^{A(x)}$ basta $C_0 = e^c$

$C_0 < 0 \longmapsto y(x) = -e^c e^{A(x)}$ basta $C_0 = -e^c$

dell'eq. lineare, omogenea $\boxed{y' = a(x) y.}$

dove $A(x) = \int a(x)\,dx$.

Nel caso $y' = xy \longmapsto \int x\,dx = \frac{x^2}{2} = A(x) \longmapsto \boxed{y(x) = C_0 e^{\frac{x^2}{2}}, \ \forall C_0 \in \mathbb{R}}$

Caso generale

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (*)$$

Metodo di variazione della costante

Le soluzioni di $y'(x) = a(x)y(x) \longrightarrow y(x) = c_0 e^{A(x)}$ con $A(x) = \int a(x)dx$.

Ipotesi di lavoro, la soluzione di $(*)$ la trovo scegliendo

$y(x) = C_0(x) e^{A(x)}$. Incognita è $C_0(x)$?

Impongo che $y(x)$ sia soluzione.

$$y'(x) = \underbrace{C_0'(x) e^{A(x)} + \overbrace{C_0(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x)}}_{} = a(x)y + b(x) = \underbrace{a(x)C_0(x)e^{A(x)} + b(x)}_{}$$

$(A'(x) = a(x))$.

$$\Longrightarrow \boxed{C_0'(x) e^{A(x)} = b(x).} \Longleftrightarrow \boxed{C_0'(x) = b(x)e^{-A(x)}.} \Longrightarrow C_0(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx$$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)} \cdot \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx}$$

Formula di risoluzione

$$y' = a(x)\, y + b(x) \qquad \text{con } A(x) = \int a(x)\, dx.$$

Esempio:

$$\boxed{y' = xy + x.}$$

$$a(x) = x \qquad b(x) = x.$$

$$\Downarrow$$

$$A(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{\frac{x^2}{2}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right] = -e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} + c\, e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$\boxed{y(x) = -1 + c\, e^{\frac{x^2}{2}}.}$$

$$\boxed{\int x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\int e^t\, dt = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c.}$$

sostituzione: $\boxed{t = -\frac{x^2}{2}}$ $\Longrightarrow$ $dt = -x\,dx \iff -dt = x\,dx$

OSS2: Siccome $\int b(x) e^{-A(x)} dx = g(x) + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx = e^{A(x)} \left(g(x) + C \right) = \underbrace{\boxed{e^{A(x)} g(x)}}_{\text{SOL. PART.}} + \underbrace{\boxed{C e^{A(x)}}}_{\text{SOL OM.}}$$

è soluzione di $y'(x) = a(x) y(x)$

Le soluzioni di $y'(x) = a(x) y + b(x)$ si ottengono come la somma delle soluzioni di $y' = a(x) y$ $\left(y_0(x) = C e^{A(x)} \right)$ + una soluzione particolare di $y' = a(x) y + b(x)$.

Esercizio: $\begin{cases} y' = 3y + e^{-x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$ <u>Risolvere</u>. V

Risolviamo l'equazione differenziale:

$$y' = 3y + e^{-x}. \qquad a(x) = 3 \qquad b(x) = e^{-x}.$$

$$A(x) = 3x.$$

Usando la formula di risoluzione:

$$y(x) = e^{3x} \cdot \int e^{-x} \cdot e^{-3x}\, dx. = e^{3x} \int e^{-4x} dx = e^{3x} \left[\frac{e^{-4x}}{-4} + c \right]$$

$$= -\frac{1}{4} e^{3x} e^{-4x} + c e^{3x} = \boxed{-\frac{1}{4} e^{-x} + c e^{3x}.} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Verifica: $y'(x) = \boxed{+\frac{1}{4} e^{-x} + 3c e^{3x}}$

$3y + e^{-x} = 3 \cdot \left[-\frac{1}{4} e^{-x} + c e^{3x} \right] + e^{-x} = -\frac{3}{4} e^{-x} + 3c e^{3x} + e^{-x} =$

$= \boxed{\frac{1}{4} e^{-x} + 3c e^{3x}.}$

L'insieme delle soluzioni di $y' = 3y + e^{-x}$ è dato:

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} + Ce^{3x} \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$

Per risolvere il problema di Cauchy, cerco tra tutte queste funzioni quale verifica $y(0) = 1$.

$$y(0) = -\frac{1}{4} + C = 1. \Longrightarrow C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

incognita è C

La soluzione unica del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

è data da $\boxed{y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{5}{4}e^{3x}}$

ATTENZIONE

VII.

$$y' + a(x)y = b(x). \Longmapsto y' = -a(x)y + b(x)$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) e^{A(x)}\,dx$$

NON CONFONDERS

$$\begin{cases} y' + 3y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Longmapsto \begin{cases} y' = -3y + xe^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$a(x) = -3$$

$$A(x) = -3x$$

$$y(x) = e^{-3x} \int e^{3x} \cdot x \cdot e^{-x}\,dx.$$