# Equazioni differenziali di ordine 1, a Variabili Separabili



ESEMPIO: $y' = x\,y$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

TENTATIVO $\longrightarrow$ $y(x) = e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ sarà soluzione?

Calcoliamo $y'(x) = e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x\,e^{\frac{x^2}{2}} = x\,y(x)$.

$\longrightarrow$ $\boxed{y(x) = c\,e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} \quad \forall c \in \mathbb{R}}$

L'insieme delle soluzioni

$y'(x) = c \cdot x\,e^{\frac{x^2}{2}} = x \cdot \underbrace{c\,e^{\frac{x^2}{2}}}_{y} = x \cdot y(x)$

$y' = 2y$ $\quad \to \int 2\,dx = 2x$

$y'(x) = y(x) \to y(x) = c\,e^{x}$

$\left(e^{2x}\right)' = \underbrace{e^{2x}}_{y} \cdot \underbrace{2}_{(2x)'=2} = 2\,y$

**Esempio**: $y' = \underbrace{x}\, y^2$ Cercando le soluzioni

**Domanda**: Possiamo procedere in modo analogo.

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \longrightarrow \text{Sicuramente NO !}$$

$y' = x y^2$ $(*)$ $g(x) = x$, $f(y) = y^2$.

Vogliamo separare $x$ e $y$ quindi vorremmo dividere $y^2$.

**Attenzione** bisogna escludere che $\boxed{y^2 = 0}$ ! $\boxed{y(x) = 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\to y = 0$.

1 soluzione.

**DOMANDA**: $y(x) \equiv 0$ è soluzione di $(*)$ ?

$y'(x) = 0$ sostituiamo:

$0 = x \cdot y^2 = x \cdot 0 = 0$

caso generale Variabile Separabile

$\boxed{y' = g(x) \cdot f(y)} \to$ dividere per $f(y)$. **ATTENZIONE**: escludere che $f(y) = 0$ !

1° Tappa: Troviamo le soluzioni di $\boxed{f(y) = 0}$ ora $y$ è un numero reale.

$y = y_0$, $y = y_1, \dots, y = y_k$

Conclusione le funzioni costanti

$y(x) \equiv y_0$, $y(x) \equiv y_1, \dots, y(x) \equiv y_k$

Trovato 1 soluzione: la soluzione

$y(x) \equiv 0$

sono soluzioni di

$$y' = g(x) \cdot f(y).$$

Perché? $y(x) \equiv y_0$.

$y_0$ è soluzione $f(y)=0$ significa che $f(y_0)=0$.

sostituisco la funzione costante $y(x) \equiv y_0$ nell'equazione

$$\underline{y'(x) = 0} = g(x)\, f(y_0) = g(x) \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

---

2°) Posso dividere per $y^2$

$y \neq 0$

$$\boxed{\frac{y'}{y^2} = x} \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^2(x)} = x.$$

queste due funzioni devono essere la <u>stessa</u> funzione.

2° FASE <u>Posso dividere per $f(y)$</u>

$$\boxed{\frac{y'}{f(y)} = g(x)} \longrightarrow \frac{y'(x)}{f(y(x))} = g(x)$$

$\Downarrow$ Integriamo

allora

$$\boxed{-\frac{1}{y(x)}+C_1}=\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx=\boxed{\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C.}$$

Quanto vale in termini di $y(x)$?

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx=\int \frac{1}{y^2(x)}\cdot \underbrace{y'(x)dx}\,.=$$

Facciamo la sostituzione:

$$s=y(x).$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{ds=y'(x)\,dx.}$$

$$\left(\int K(s)\,ds=\int K(y(x))\cdot y'(x)\,dx\right)$$

Formula di Sost.

$$=\int \frac{1}{s^2}\,ds=\int s^{-2}\,ds=\frac{s^{-1}}{-1}+C.=-\frac{1}{s}+C.$$

$$\| $$

$$\boxed{-\frac{1}{y(x)}+C.}$$

$$\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

$\alpha\neq -1.$

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}\,dx=\int g(x)\,dx\overset{\text{IV}}{=}G(x)+C$$

$\boxed{s=y(x)}$ cambio di variabili

$ds=y'(x)\,dx$

$$\int \frac{1}{f(s)}\,ds=H(s)=H(y(x))$$

$s=y(x)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H(y(x))=G(x)+C}$$

Relazione tra $y(x)$ e "$x$"

V

$$\boxed{-\frac{1}{y(x)}+C_1=\frac{x^2}{2}+C}$$

$$-\frac{1}{y(x)}=\frac{x^2}{2}+\underbrace{C-C_1}$$

è una costante qualsiasi quindi la chiamiamo $C_0$

$$\boxed{-\frac{1}{y(x)}=\frac{x^2}{2}+C_0} \Rightarrow$$

Risolvo l'equazione in $y(x)$.
Trovo $y(x)$ in funzione di $x$

$$\frac{1}{y(x)}=-\frac{x^2}{2}-C_0 \implies \boxed{y(x)=\frac{1}{-\frac{x^2}{2}-C_0} \quad \forall C_0\in\mathbb{R}}$$

Risolviamo

$$H(y(x))=G(x)+C$$

$$\vdots$$

$$\boxed{y(x)=H^{-1}[G(x)+C]}$$

è sol. di

$$y'=f(y)\,g(x) \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=f(y)\,g(x)$$

$$\boxed{\int\frac{dy}{f(y)}=\int g(x)\,dx}$$

Verifichiamo
che $\forall c_0 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{2} - c_0} \quad \text{è}$$

soluzione di

$$y' = x y^2.$$

Calcoliamo

$$y'(x) = \frac{-(-x)}{\left(-\frac{x^2}{2} - c_0\right)^2} = \frac{x}{\left(-\frac{x^2}{2} - c_0\right)^2} = x \cdot \frac{1}{\left(-\frac{x^2}{2} - c_0\right)^2} = x \cdot y^2.$$

perché $y(x)^2 = \left(\frac{1}{-\frac{x^2}{2} - c_0}\right)^2 = \frac{1}{\left(-\frac{x^2}{2} - c_0\right)^2}$

ALTRO ESEMPIO (X) $y'(x) = x(1-y^2)$. a Variabili separabile con $g(x)=x$, $f(y)=1-y^2$.



1° TAPPA. Impongo $f(y)=0$ cioè $1-y^2=0$.

$y^2=1$

$y=1$ oppure $y=-1$.

Quindi le funzioni $\boxed{y(x)\equiv 1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e $\boxed{y(x)\equiv -1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ sono soluzioni di (X).

$y\neq 1$ e $y\neq -1$

2° TAPPA "DIVIDERE"

$$\frac{y'(x)}{1-y(x)^2} = x \cdot \Longrightarrow \int \frac{y'(x)}{1-y(x)^2}dx = \int x\,dx.$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

$$\|$$

$$\int \frac{y'(x)}{1-y(x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1-y(x)^2} \cdot y'(x)dx = \int \frac{1}{1-s^2}\,ds =$$

$$\boxed{s = y(x).}$$
$$\boxed{ds = y'(x)dx.}$$

$$\frac{1}{1-s^2} = \frac{1}{(1-s)(1+s)} = \left[\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right]\frac{1}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right] ds = \frac{1}{2}\left[\log(1+s) - \log(1-s)\right] = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{y(x)+1}{1-y(x)}\right).$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y(x)}{1-y(x)}\right) = \frac{x^2}{2} + c.}$$

¿ $y(x) =$

IX

Risolviamo:

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y(x)}{1-y(x)}\right)=\frac{x^2}{2}+c \Longmapsto \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=x^2+2c$$

→ Peso exp.

$$\frac{1+y}{1-y}=e^{x^2+2c}=e^{x^2}\cdot e^{2c}=c_0 e^{x^2}$$

→ molt per $1-y$

$$1+y=c_0 e^{x^2}(1-y). \Longmapsto 1-c_0 e^{x^2}=-y-c_0 e^{x^2}y.$$

$$-1+c_0 e^{x^2}=y+c_0 e^{x^2}y=y(1+c_0 e^{x^2}).$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y=\frac{c_0 e^{x^2}-1}{c_0 e^{x^2}+1}}$$

→ soluzione di $y'=x(1-y^2)$ $\neq 1$ e $\neq -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

NATO
RTD A

La soluzione di un problema di Cauchy è definita in un intervallo che contiene il punto del pb. iniziale

non può essere un ~~altro~~ insieme diverso da un intervallo

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies \text{trovate la soluzione } y(x) = h(x).$$

La funzione $h$ ha un insieme di definizione che non è per forza un intervallo.
$y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy nel intervallo che contiene $x_0$ dell'insieme di definizione di $h$. Esempio: def $h = (-\infty,-1) \cup (-1,3) \cup (3,+\infty)$.

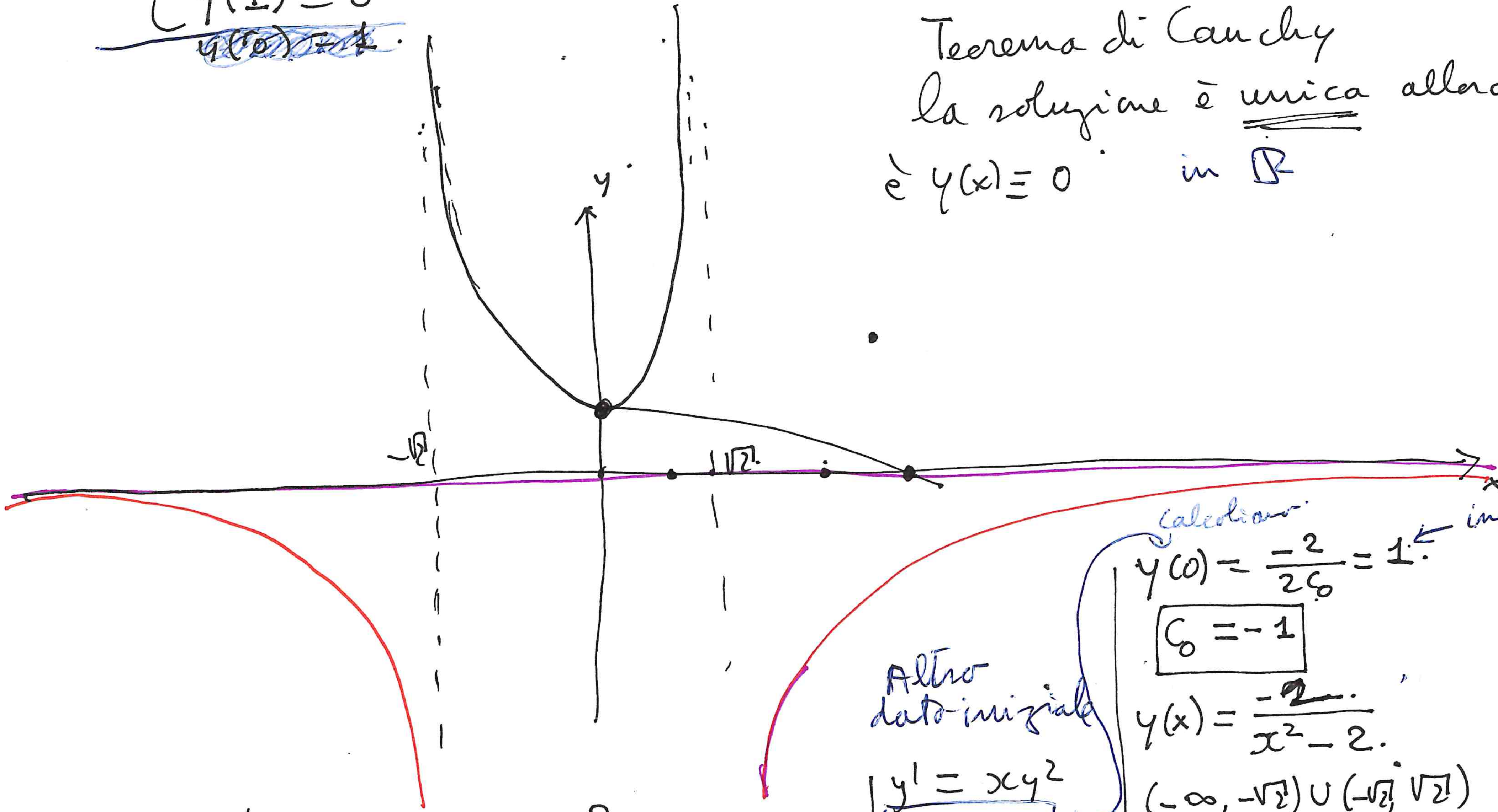
se $x_0 < -1 \implies y$ è sol. in $(-\infty,-1)$.

XI

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases} \implies y(x) \equiv 0 \rightarrow \text{verifica } y(1) = 0$$

$$y'(x) = \underline{\underline{0}} = x \cdot 0^2 = \underline{\underline{0}}$$

Teorema di Cauchy la soluzione è $\underline{\underline{\text{unica}}}$ allora è $y(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}$




Altro dato iniziale

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ \boxed{y(0) = 1} \neq 0 \end{cases}$$

calcoliamo

$$y(0) = \frac{-2}{2c_0} = 1 \leftarrow \text{imponiamo}$$

$$\boxed{c_0 = -1}$$

$$y(x) = \frac{-2}{x^2 - 2}$$

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{2} - c_0} = \frac{-2}{x^2 + 2c_0}$$

~~y(x) è sol~~

$$y(x) = \frac{-2}{x^2 - 2}$$ è soluzione del pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. e solo lì.

$$y' = \frac{y^2+1}{x^2+1} \longrightarrow \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad f(y) = y^2+1.$$

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (y^2+1).$$

1°) Dove si annulla $f(y)$.

$$\boxed{y^2+1=0} \implies \text{NON CI SONO SOLUZIONI}$$

non ci sono soluzioni costanti.

2°). $\dfrac{y'}{y^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$ SEPARATO LE VARIABILI

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)^2+1} = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{s^2+1}\,ds = \operatorname{arctg} s = \operatorname{arctg} y(x).$$

$$\boxed{s = y(x)}$$

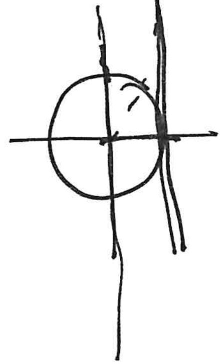
$$\boxed{\operatorname{arctg} y(x) = \operatorname{arctg} x + C} \Longrightarrow$$

Risolviamo

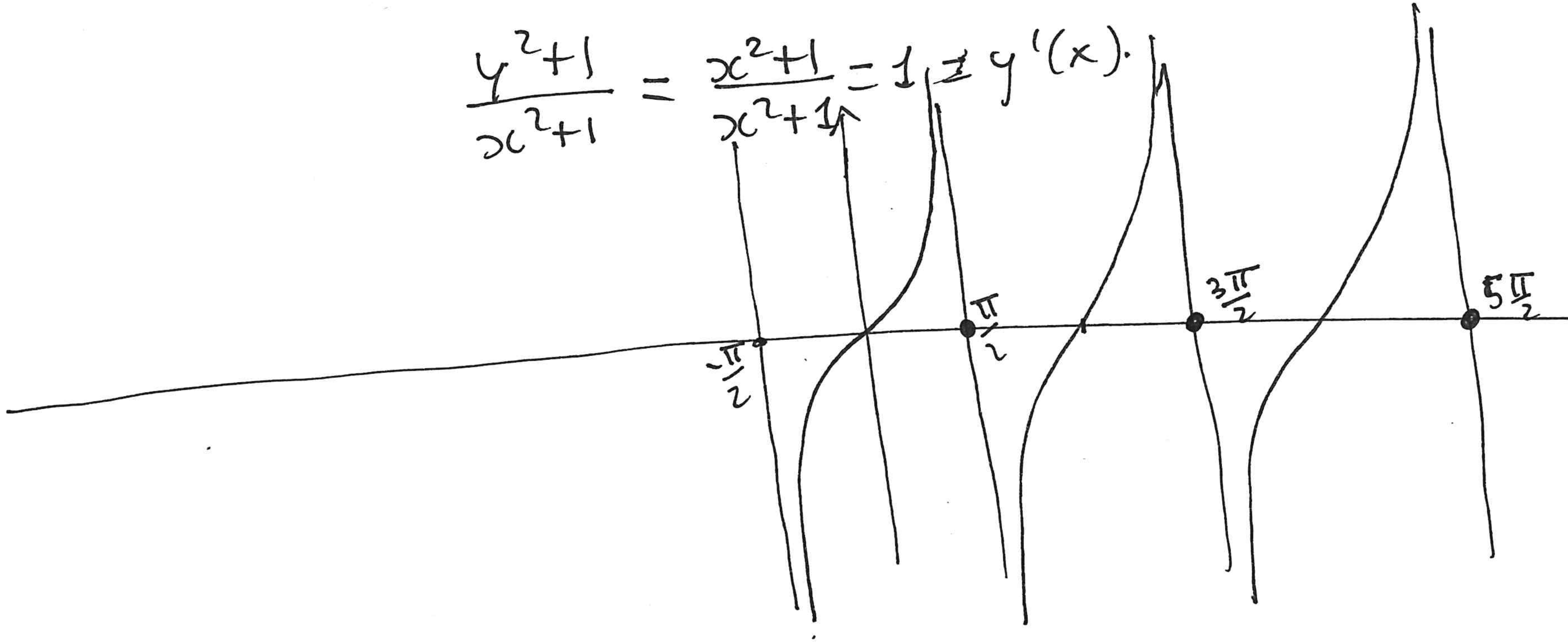
$$\boxed{\operatorname{tg} y(x) = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg} x + c\right]} \;!! \neq \cancel{x + \operatorname{tg} c}$$

Nel caso $C = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}[\operatorname{arctg} x] = x \Longrightarrow y(x) = x$.

$$y'(x) = 1.$$



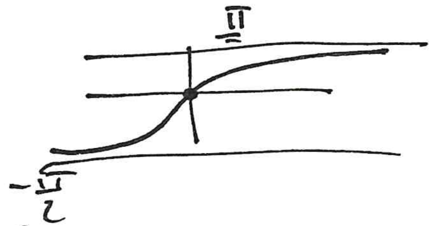
$$\frac{y^2+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 = y'(x).$$



~~Ris~~ Risolviamo problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $y(x) = tg\left[\operatorname{arctg} x + c\right]$ Tutte le soluzioni XV

Imponiamo la condizione iniziale, sostituiamo $x=0$.

$$y(0) = tg\left[\operatorname{arctg} 0 + c\right] = tg\, c = 1.$$

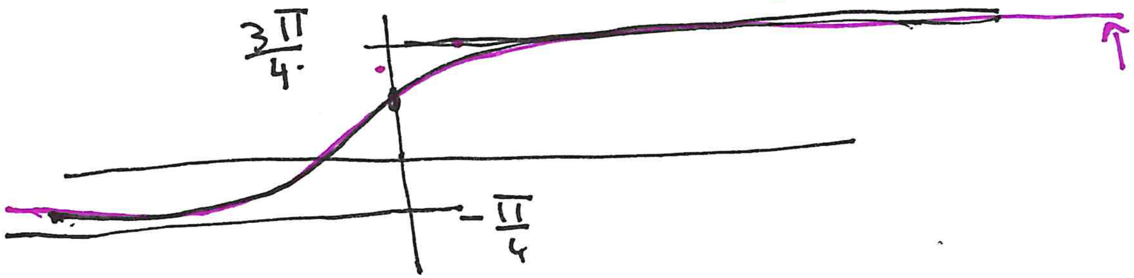


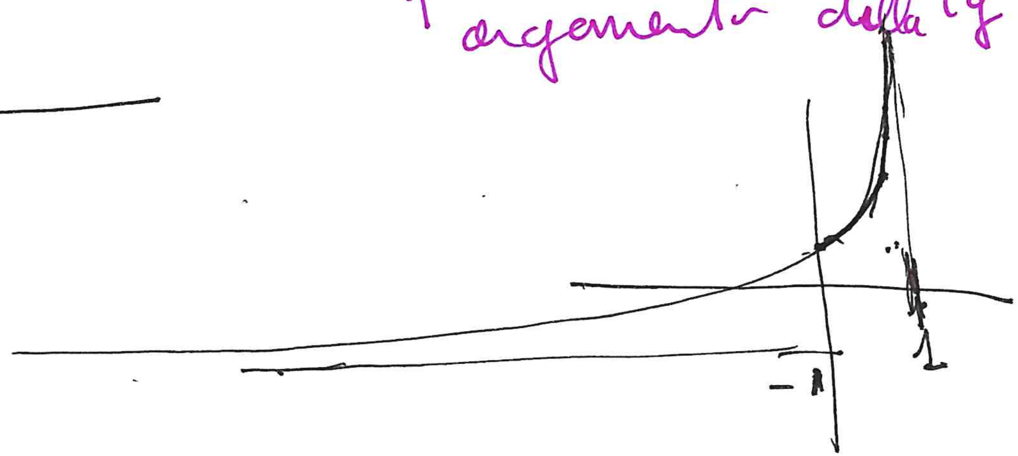

$$\boxed{c = \frac{\pi}{4}.}$$

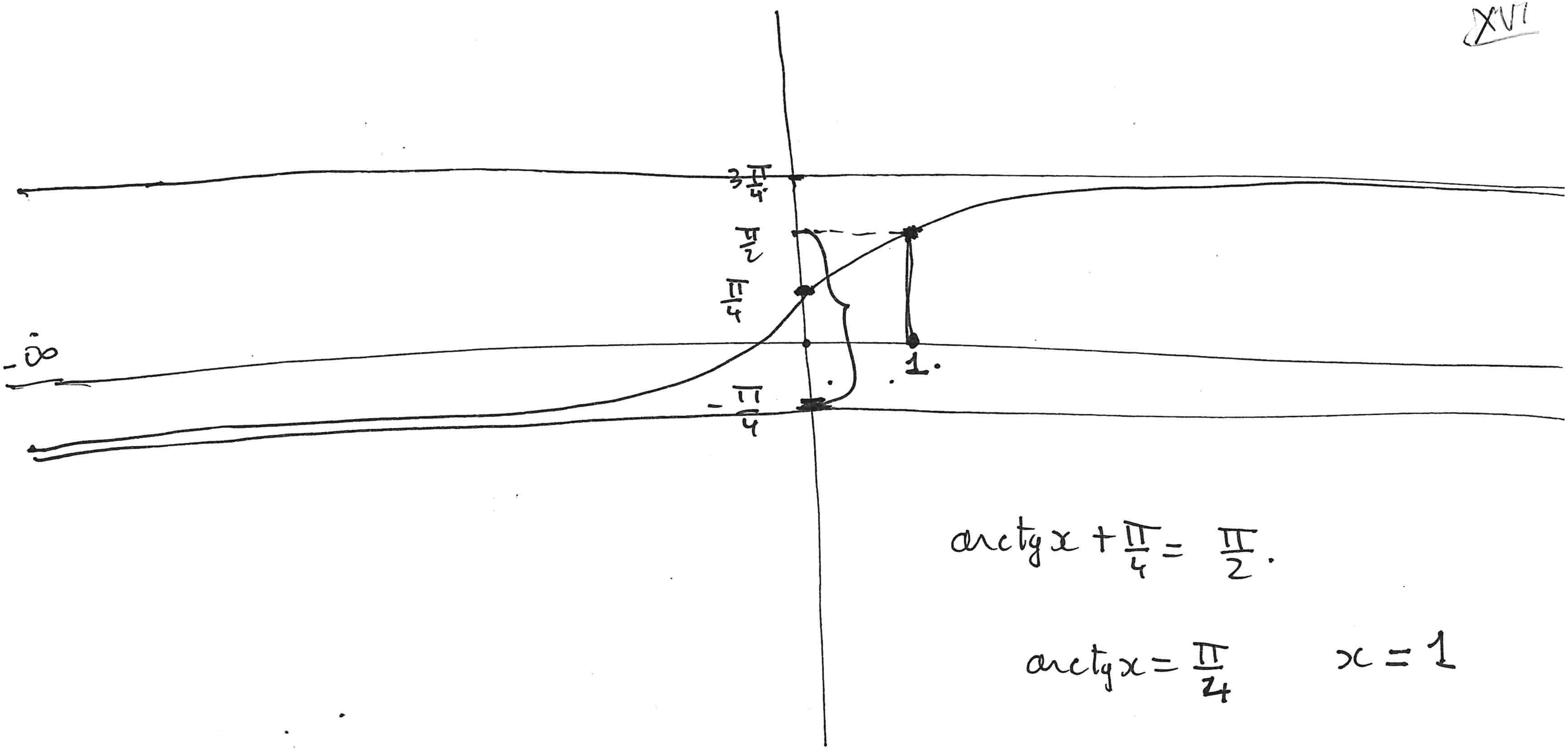
La soluzione unica del problema di Cauchy è

$$y(x) = tg\Big[\underbrace{\operatorname{arctg} x + \tfrac{\pi}{4}}\Big].$$

dove è soluzione?






$$\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \qquad x = 1$$

$$-\infty < x < 1 \implies -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

~~y(x) è soluzia~~ $y(x) = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right]$ è soluzione del problema di Cauchy nel intervallo $(-\infty, 1)$.

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y} \\ \cancel{y(x)} \; y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

$y'(x) = \sqrt{y}$ a variabili separabili

$g(x) = 1$

$f(y) = \sqrt{y}$

I) $\sqrt{y} = 0$. $\underline{y = 0}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{y(x) \equiv 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è sol.

II) $y \neq 0$, $\sqrt{y} \neq 0$ $\quad \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = 1 \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\, dx = \int 1\, dx.$

$$\int 1\, dx = x + C.$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{\sqrt{s}}\, ds = \int s^{-\frac{1}{2}}\, ds = \frac{s^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{s} = 2\sqrt{y(x)}$$

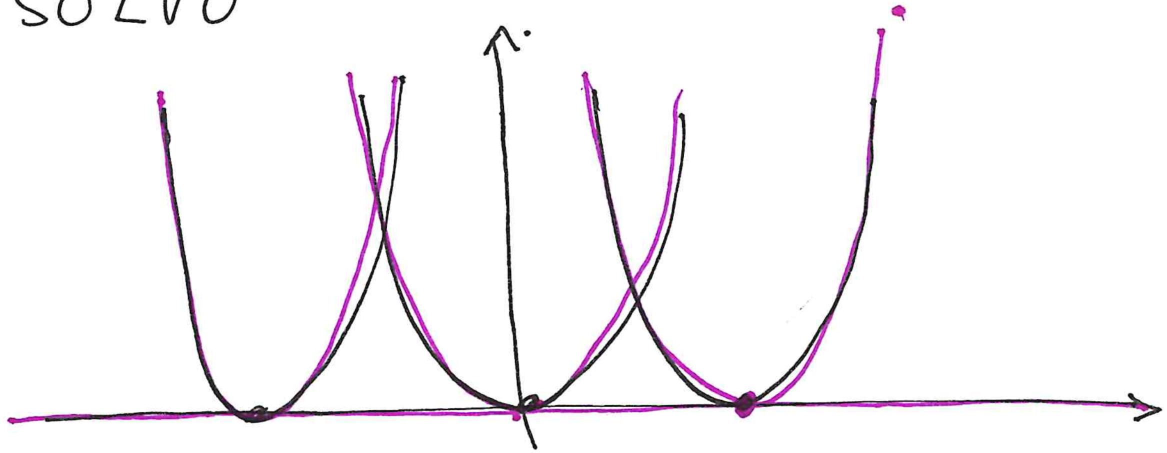
$s = y(x)$

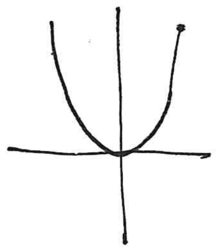
$ds = y'(x)\,dx$

III $\boxed{2\sqrt{y(x)} = x + c.}$ RISOLVO

$$\sqrt{y} = \frac{x+c}{2}$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2.$$





$y(0) = 0$

$y \equiv 0$

$y(x) = \frac{x^2}{4}.$

XIX

$y' = x + y^2$ $\qquad$ $y' = g(x) \cdot f(y)$

<u>Domanda</u> L'equazione è a variabili separabili? NO

$y' = e^{x+y} = e^x e^y$

Si $g(x) = e^x$
$f(y) = e^y$

$y' = xy^2 + e^x y^2$

$$\int y' - y^2 \, dx = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$\int y'(x) - y^2(x) \, dx =$ NON LO POSSO INTEGRARE

$y' = y^2(x + e^x)$

$s = y(x)$ $\qquad$ $ds = y'(x) dx$