mercoledì 15 dicembre 2021 11:18

Campi Vettoriali

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \in \Omega \longrightarrow f(x,y) \in \mathbb{R}$$

$z = f(x,y)$ eq. del grafico

è una superficie di $\mathbb{R}^3$

Se la funzione è derivabile allora

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

grad di f:

$$\nabla f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \in \Omega \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

Esempio di Campo Vettoriale

Definizione di Campo Vettoriale $N > 1$

$$F : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \to (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_N(\vec{x}))$$

dove F_i sono delle funzioni.

Se $N = 2$ $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(Campo Vettoriale piano)

$$(x, y) \to F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

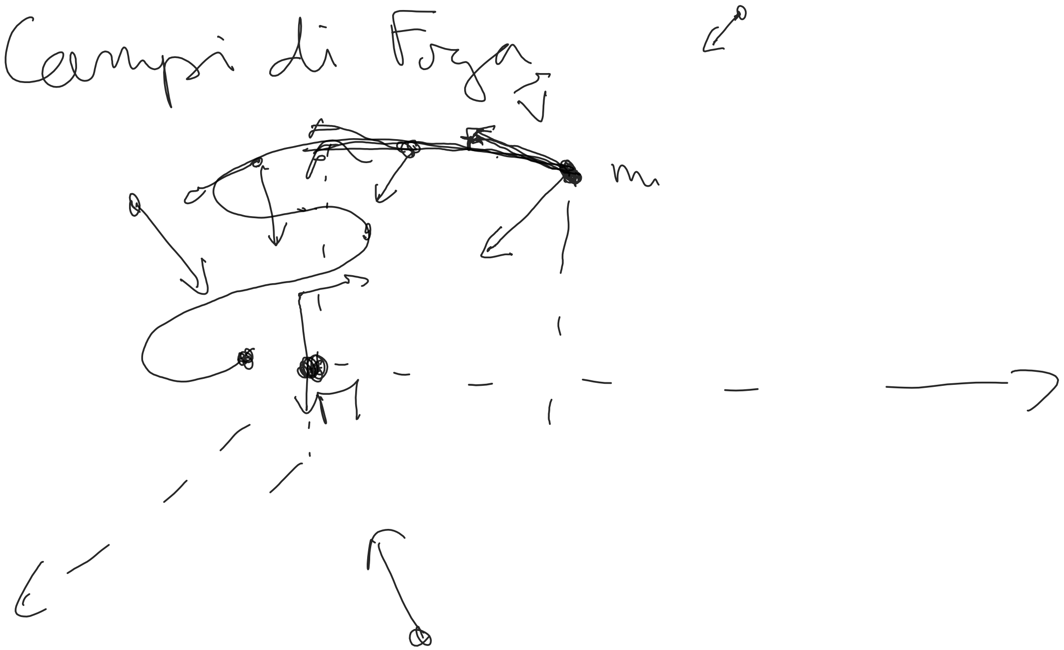
$N = 3$: $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to$

$$(x, y, z) \to F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

Esempio $\vec{\text{Campo}}$ delle velocità

Grandezza fisica che rappresenta la velocità di un fiume, in ogni punto del fiume stabilire la velocità della particella, la misura, la direzione e il verso cioè un vettore $(x,y,z) \in \text{Fiume} \to \vec{v}(x,y,z) = (v_x, v_y, v_z)$

Esempio Campi di Forza



$$\vec{F}(x,y,z) = -Mg(x,y,z) = (-Mgx \quad -Mgy$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \qquad (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

$\boxed{N=2}$ LAVORO di un Campo Vettoriale

lungo una curva φ parametrizzata

$$F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \in D \longrightarrow F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \;!$$

$$\varphi : t \in [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t)) \in D \;!!$$

Definizione

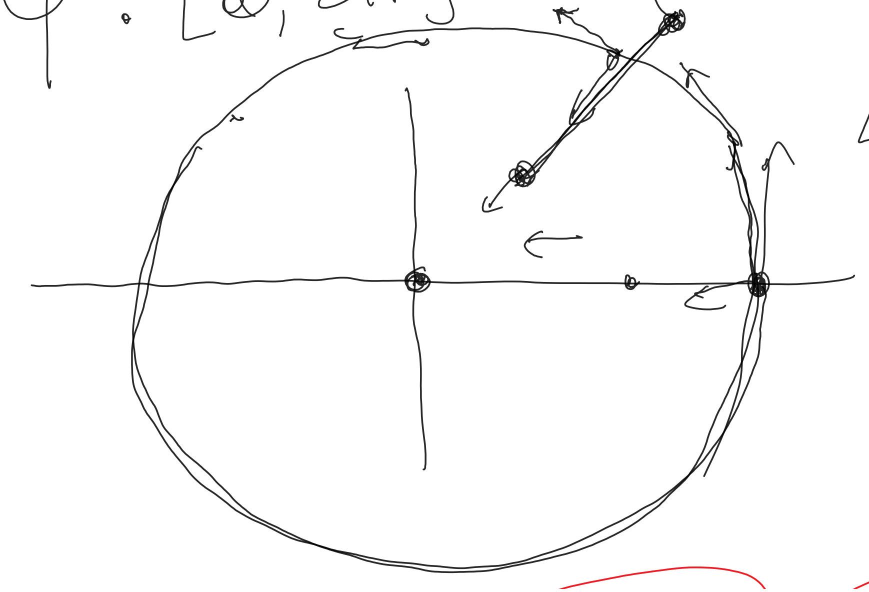
$$\boxed{L(F,\varphi) = \int_a^b \langle F(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle \, dt}$$

$$\boxed{L(F,\varphi)=\int_a^b F_1(x(t),y(t))\,x'(t)+F_2(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt.}$$

<u>Esempio</u> $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$

$\varphi:[0,2\pi]\longrightarrow(R\cos t,\ R\sin t).$

$L(F,\varphi)=?$



$$\varphi'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t) = (x'(t), y'(t))$$

$$F(R\cos t, R\sin t) = \left(\frac{-R\cos t}{2\pi R^3},\ \frac{-R\sin t}{R^3}\right) \leftarrow$$

$$\int_a^b \langle \vec{F}, \varphi' \rangle dt = \int_0 \frac{\cos t \sin t}{R} - \frac{\cos t \sin t}{R} dt = 0$$

$$\varphi(t) = (t,\ t), \quad t \in [1, 2]$$

$$y = x$$

$$\varphi'(t) = (1,\ 1).$$

$$F(t, t) = \left(\frac{-t}{(t^2+t^2)^{3/2}},\ \frac{-t}{(t^2+t^2)^{3/2}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2^{3/2} t^2},\ \frac{-1}{2^{3/2} t^2}\right)$$

$$L = \int_1^2 -\frac{2}{2^{3/2}\, t^2}\, dt = -\frac{1}{2^{1/2}} \int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{2^{1/2}} \frac{t^{-1}}{(-1)} \Bigg|_1^2$$

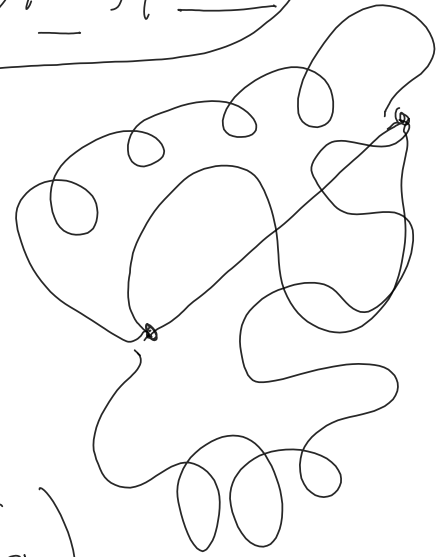
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

OSSERVAZIONE Se il campo vettoriale $F(x,y)$ è il gradiente di una funzione f

$$F(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \nabla f$$

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t))$$

$$L(\nabla f, \varphi) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)}_{=\,g'(t)}\,dt =$$



$$\left(g(t) = f(x(t),y(t)) \longrightarrow g'(t) \right)$$

$$t \in [a,b]$$

$$= \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a)$$

$$= \underline{f(x(b),y(b))} - \underline{f(x(a),y(a))}$$

Quindi il lavoro non dipende dalla curva ma solo dal punto iniziale e dal punto finale.

Definizione: Un campo è conservativo se è il gradiente di una funzione nel suo dominio di esistenza.

Se il campo è conservativo allora il lavoro dipende solo dai punti iniziali e finali della curva.
Vale anche il viceversa se per ogni coppia di punti il lavoro di un campo vettoriale lungo una qualsiasi curva regolare dipende solo dai punti questione allora

il campo conservativo.

Quando un campo $\vec{F}$ è conservativo?

Cioè quando esiste una funzione f t.c.

$$\vec{F} = \nabla f \quad ?$$

Se la ~~funzione f~~ esiste allora si chiama potenziale di $\vec{F}$

$$F(x,y) = (x+2y,\ x)$$

F è conservativa? Cerchiamo il potenziale

$\vec{F} = \nabla f \implies f$ t.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + 2y \longrightarrow f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + 2yx + g(y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$$

$$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + g'(y)} = x$$

IMPOSSIBILE

$g'(y) = x - 2x = -x$ che da x

F NON È CONSERVATIVO

Se $\vec{F}$ è conservativo cioè

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \left(F_1 , F_2 \right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Per il Teorema di Schwarz:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \quad (*)$$

Se F verifica (*) allora irrotazionale

Se $\vec{F}$ è $\boxed{\text{conservativo}}$ allora è $\boxed{\text{irrotazionale}}$

È vero il viceversa?

In generale no SERVE UNA CONDIZIONE IN PIÙ È SUL DOMINIO DI ESISTENZA DEL CAMPO

Teorema: Se $\vec{F}$, definito in $D \subset \mathbb{R}^2$, verifica

1) $\vec{F}$ è irrotazionale in D

(cioè

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

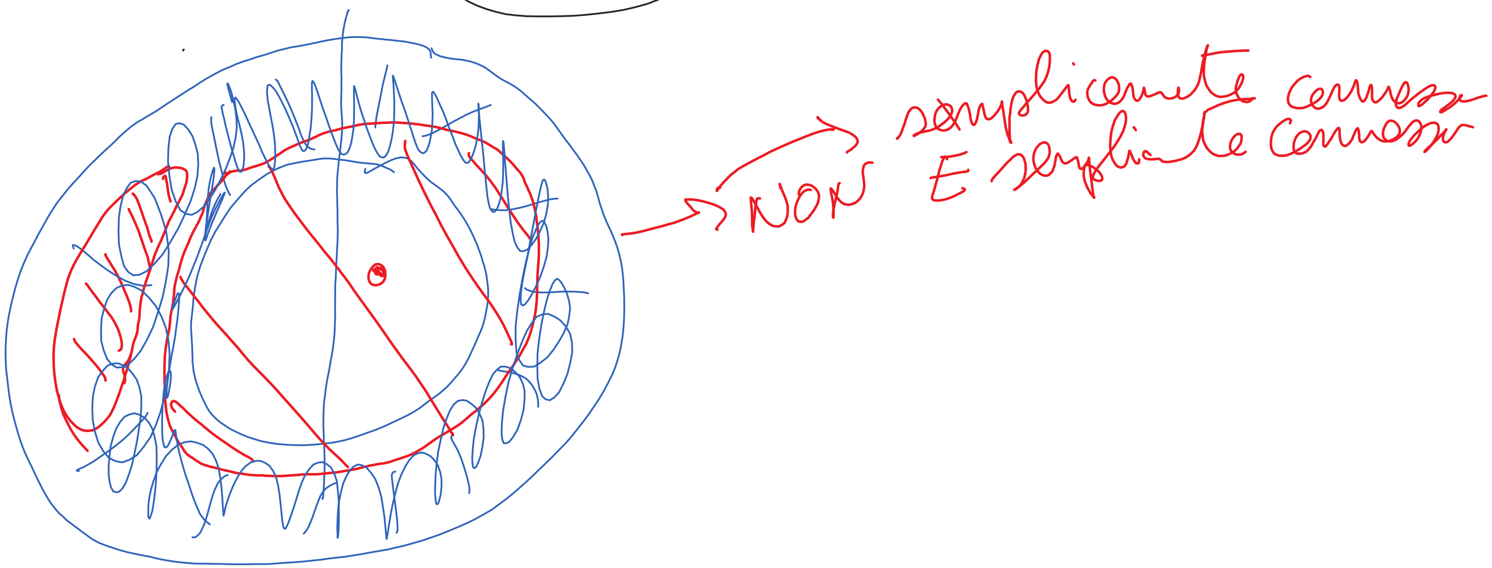
2) D è semplicemente connesso

Allora $\vec{F}$ è conservativo cioè

esiste un potenziale f che verifica

$$\nabla f = \vec{F}.$$

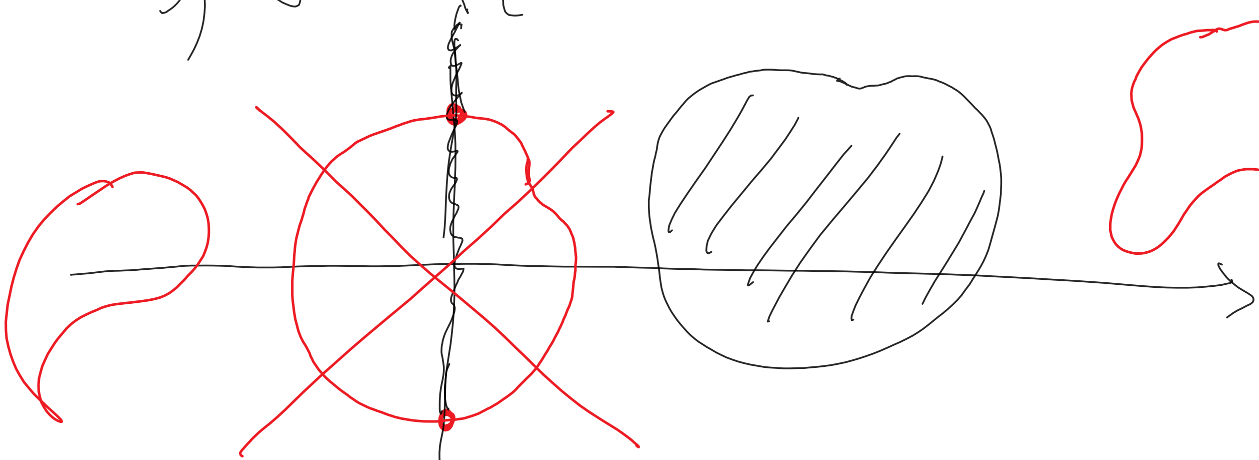
Definizione $D \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso "se non ha buchi". cioè presa una qualsiasi curva chiusa di D allora l'insieme dei punti contenuti nella porzione di piano limitata che ha come bordo la curva appartengono a D.



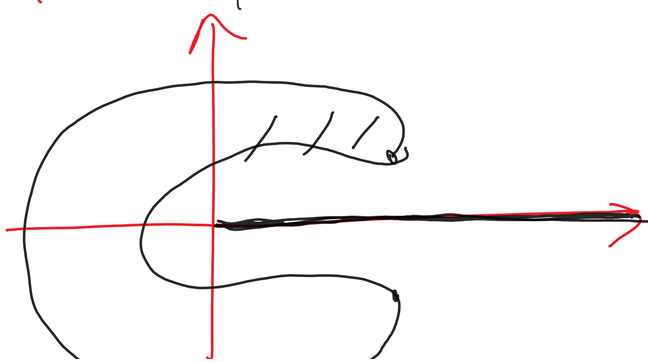
Esempi: 1) $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso

2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso

3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$ è semplice connesso



4)



Il dominio è semplicemente connesso.

Esempio 1

$$F(x,y) = (x+2y,\ x)$$

$$F_1 = (x+2y) \longrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2$$

$$\neq$$

$$F_2 = x \longrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$$

non è irrotazionale $\Longrightarrow$ non è conservativo

$\Downarrow$

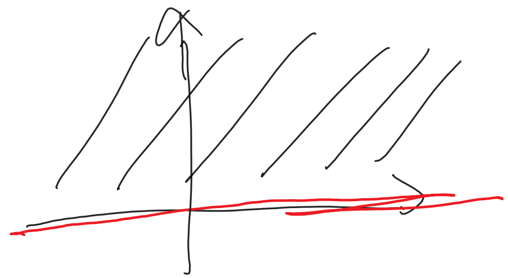
usare la definizione di lavoro

Es. 2: $F(x,y) = \left(\log y, \frac{x}{y}\right)$

Domanda: F è conservativo?

Quale è il dominio di esistenza di F?

$D_F = \{(x,y)$ t.c. $y > 0\}$



Verifichiamo se F è irrotazionale

$$\frac{\partial}{\partial y}(\log y) = \frac{1}{y}$$

$$\| \iff F \text{ è irrotazionale}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

D_F è ~~semplicemente connesso~~ ! (Sì

$$\boxed{\text{Quindi } F \text{ è conservativo cioè esiste un potenziale.}}$$

Se vogliamo trovare il potenziale dobbiamo risolvere $\nabla f = F$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \log y \longrightarrow f(x,y) = x \log y + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$\downarrow$

$\partial f = x \quad + g'(y) = x$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{y} + g'(y) = \frac{x}{y}$$

$g'(y) = 0$

$g(y) = cte = 0$

$f(x,y) = x \log y \longrightarrow \nabla f = \vec{F}$

$$L(F, \gamma) = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Esempio 3:

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Dominio di esistenza: $x^2+y^2 \neq 0$

$(x,y) \neq (0,0)$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\longrightarrow$ D non è semplicemente connesso

Verifichiamo se $\vec{F}$ è irrotazionale

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\right) = \boxed{\frac{-1(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

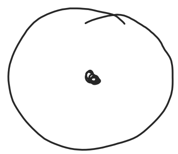
$\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\vec F$ non è conservativo.

~~Parentesi~~. Se $\vec F$ è conservativo e la curva chiusa φ contenuta nel dominio è allora $L(\vec F, \varphi) = 0$

Dim $L(\vec F, \varphi) = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$
$= f(x(a), y(a)) - f(x(a), y(a)) = 0$

$\varphi : [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t)$ è una curva chiusa!



$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$L(\vec F, \varphi)$

$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$F(\cos t, \sin t) = (-\sin t, \cos t)$

$\int^{2\pi}$

$$L(F,\varphi) = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}, \varphi' \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi \neq 0$$

F NON È CONSERVATIVO

$$F(x,y) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

Campo definito $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
gravitazionale

Dominio non è semplicemente connesso.

$F(x,y)$ è conservativo $\Leftrightarrow$ irrotazionale

$$F(x,y) = \nabla f$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{5} \quad \text{def} \cdot \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\nabla f = \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2y = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$