I

Funzioni di più variabili

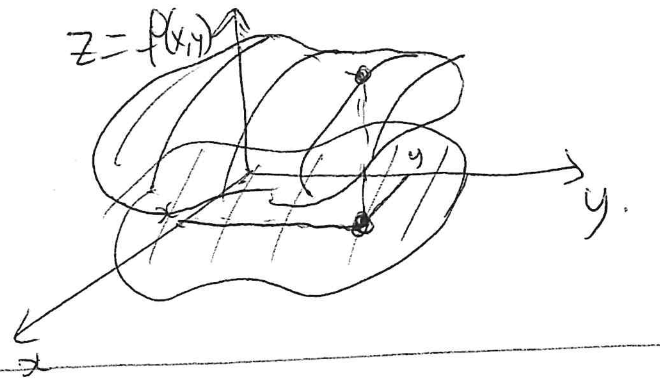
$$f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_N).$$

Il caso $N=2$.

$N=2$

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

Grafico di $f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.c. $(x,y) \in D$ e $z = f(x,y) \}$



Il grafico è una superficie.

$N=3$

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$$

Grafico di $f = \{ (x,y,z,\gamma) \in \mathbb{R}^4$ t.c. $(x,y,z) \in D$, $\gamma = f(x,y,z) \}$

Concetto di Limite

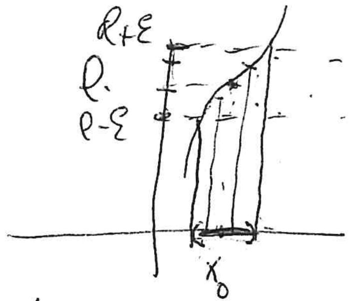
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_0 pto di accumulazione per I. $\delta(\varepsilon, x_0)$.

Def: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ t.c.

$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

$d(x, x_0) < \delta$ $\quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$



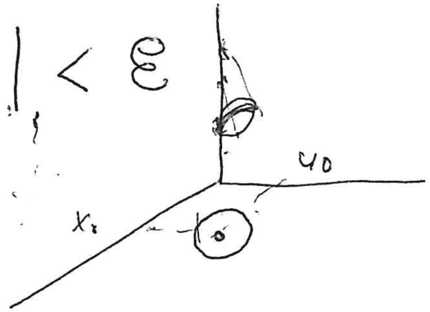
dire $|x - x_0| < \delta$ vuol dire che la distanza da x a x_0 è minore di δ.

Def: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) è un pto di accumulazione per D.

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, (x_0, y_0))$ t.c.

$0 < d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

$$d((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$



Esempio 1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ Verifichiamolo.

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta = ?\ldots$ t.c. $d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow |xy - 0| < \varepsilon$.

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\boxed{|xy| < \varepsilon.}$

si parte dalla fine.

$-\varepsilon < xy < \varepsilon$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

$$\boxed{|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

VERA $\boxed{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ (1)

$2xy \leq (x^2+y^2)$. ?

$\Uparrow$

$0 \leq x^2+y^2-2xy = (x-y)^2$ vera.

$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \Leftrightarrow 0 \leq x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$.

Imponiamo che $\frac{1}{2}(x^2+y^2) < \varepsilon \underset{C.S.}{\Longrightarrow} |xy| < \varepsilon$.

$$\Uparrow$$

$$x^2+y^2 < 2\varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$\forall (x,y)$ t.c. $\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2\varepsilon} = \delta$.

Definizione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua in $(x_0,y_0) \in D$.

se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \boxed{f(x_0,y_0)}$.

"Meta-teorema" Tutte le "funzioni elementari" sono continue nel loro insieme di definizione.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0 \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(1,2)} xy = 2.$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$ 1°) Insieme di definizione di f. ? IV

$x^2+y^2 \neq 0 \implies (x,y) \neq (0,0), \implies D_{e}f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2}. \qquad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}.$$

$(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

La difficoltà in $(0,0)$ perché $(0,0) \notin$ Dominio di f.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ?\ ,\ \exists ?$$

Teorema Sia f una funzione tale che

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell} \implies \text{per ogni curva } (x(t),y(t)) \text{ t.c. } \lim_{t\to t_0} (x(t),y(t)) = (x_0,y_0). \implies \boxed{\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t)) = \ell.}$$

Per ogni curva che passa per (x_0,y_0). la funzione ristretta alla curva si avvicina a ℓ.

In particolare

Se considero le rette passanti per (x_0, y_0).

$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad x = x_0$$

$$g_m(x) = f(x, m(x - x_0) + y_0).$$

allora se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \implies \lim_{x\to x_0} g_m(x) = \ell$ e $\lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = \ell$

Se esistono 2 rette $y = m_1(x - x_0) + y_0$ e $y = m_2(x - x_0) + y_0$ t.c.

$$\lim_{x\to x_0} f(x, m_1(x - x_0) + y_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x, m_2(x - x_0) + y_0)$$

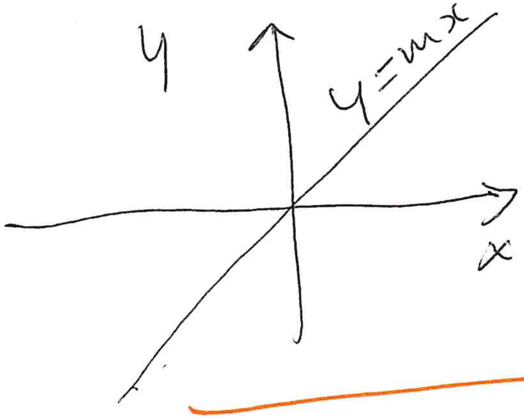
allora $\boxed{\text{non esiste}}$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

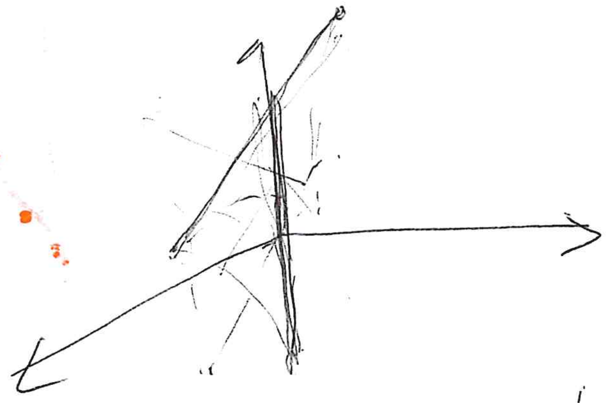
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \; ?$$

Per vedere se esiste il limite considero le rette che passano per $(0,0)$.

$$\boxed{y = mx} \quad \text{oppure} \quad x = 0$$

$$f(x,mx) = \frac{x\cdot(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$





$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x,mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2} \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ NON ESISTE}$$

se dipende da m

$m = 1 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$m = 2 \longrightarrow \frac{2}{5}$

verificare
Se esiste

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}}$$

1° Calcoliamo $f(x,mx)$, $f(0,y)$.

$$f(x,mx) = \frac{x^2}{x^2+m^4x^4} = \frac{x^2}{x^2(1+m^4x^2)} = \frac{1}{1+m^4x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+m^4x^2} = 1 \quad \text{non dipende da } m$$

$$f(0,y) = \frac{0}{0^2+y^4} = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

$1 \neq 0$

$(0,0) \notin \mathrm{Dom}\, f$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = mx \\ x = 0 \end{array}}$$

$y = x \qquad y = 2x$

NON ESISTE IL LIMITE

$$f(0,y) = \frac{0}{0+y^4} = 0$$

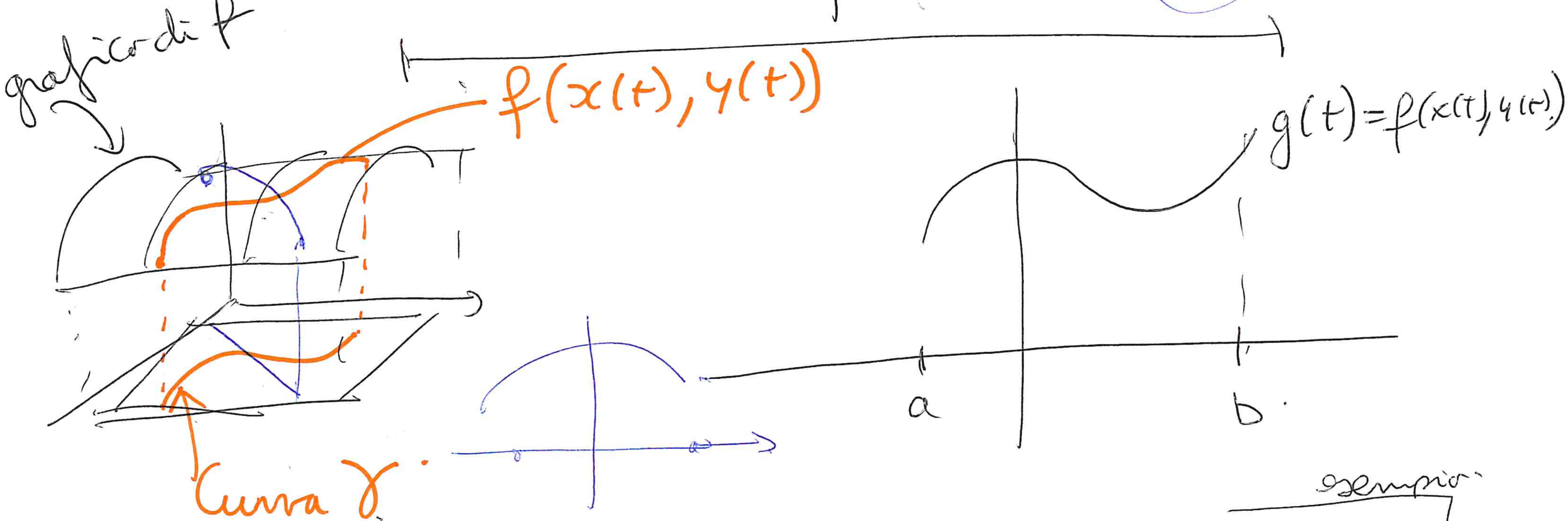
$$\frac{x^2}{x^2+m^4x^4} = \frac{1}{1+m^4x^2} \to \cancel{0}\ 1.$$

La restrizione di una funzione a una curva

Data $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e data una curva $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in D \ \forall t \in [a,b]$

allora chiameremo restrizione di f alla curva γ la funzione

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow f(x(t), y(t)) = g(t)$$



Nel caso specifico in cui la curva è una retta $\boxed{y = mx}$ esempio

$f(x, mx) = g(x)$

~~Note~~ - Derivate parziali $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ X

(x_0, y_0) sia un p.to di accumulazione di D

Def. f è derivabile rispetto a x in (x_0, y_0), se esiste finito

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

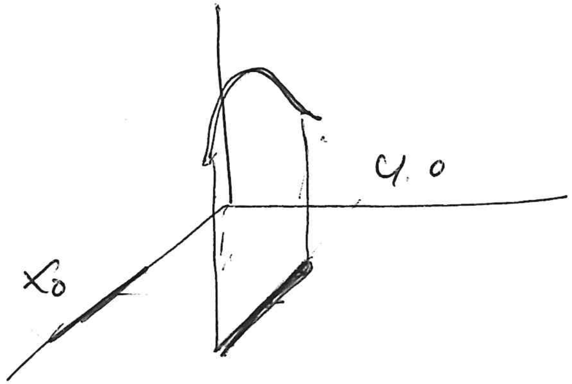
allora diremo che è uguale alla derivata di f rispetto a x $= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

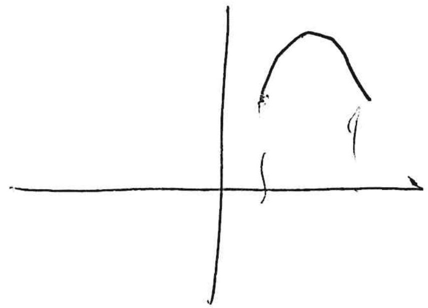
f è derivabile rispetto a "y" in (x_0, y_0) se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

OSS 1 $\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ è un rapporto incrementale dove l'incremento è solo nella variabile x.

$g(x) = f(x, y_0)$.





$$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0).$$

quindi $f(x, y) = x^2 + xy \Longrightarrow g(x) = x^2 + xy$

dove y è diventato un parametro cioè una costante

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x) = 2x + y$$

$h(y) = x^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h'(y) = x.$$

Per derivare rispetto a "y" è x che diventa una costante

XII.

$$f(x,y) = x\sin(x^2+y^2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \longrightarrow g(x) = x\sin(x^2+y^2)$$

y é um parametro

$$g'(x) = \sin(x^2+y^2) + x\cdot\cos(x^2+y^2)\cdot 2x.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2).}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ ? \longrightarrow h(y) = x\sin(x^2+y^2)$$

x é um parametro

$$h'(y) = x\cos(x^2+y^2)\cdot 2y$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\cos(x^2+y^2).}$$

Prima applicazione ~~dle~~ del Concetto di Derivata Parziale

Se esistono ~~le~~ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. allora

il piano <u>candidato</u> ad essere il piano tangente nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

è il piano di equazione:

$$\Pi_1 \qquad \boxed{z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)}$$

<u>Definizione</u>. Π_1 è il <u>piano tangente</u> in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se vale la seguente proprietà:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)\right)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

f è <u>differenziabile</u> in (x_0, y_0).

PIANO TANGENTE IN (0,0)

$f(x,y) = xy$ $\qquad (0,0)$.

$f(0,0) = 0 \cdot 0 = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$. $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$.

$\downarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$\longrightarrow$ Candidato piano tangente $\boxed{z = 0}$

Per verificare che si tratta del piano tangente.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0.$$

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$y = mx \longrightarrow \frac{x \cdot mx}{\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \frac{x^2 m}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \frac{|x|\, m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| \cdot m}{\sqrt{1+m^2}} = 0.$$

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0}$$

Quindi la funzione $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$ e ha come piano tangente $\boxed{z=0}$

Esercizio: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Trovare il candidato a essere piano tangente in $(0,0)$ e dimostrare che non lo è.