EQUAZIONI DIFFERENZIALI

10/11/21 I

Equazioni in cui l'incognita è una funzione

Un equazione differenziale è un uguaglianza dove appare la funzione incognita e le sue derivate (almeno 1 derivata).

La funzione incognita in generale useremo $y(x)$ o y

Esempio 0 : $y'(x) = x^2$. quali sono le funzioni $y(x)$ che "verificano" $y'(x)=x^2$ cioè tali che $\forall x \in I$ se calcolima $y'(x)$ troviamo la funzione x^2.

1 soluzione è $y(x) = \frac{x^3}{3} \longmapsto y'(x)=x^2$

altra soluzione $y(x) = \frac{x^3}{3} + 23 \longmapsto y'(x) = x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$ queste due funzione verificano l'equazione

l'insieme di tutte le soluzione è dato $\boxed{y(x) = \frac{x^3}{3} + C}$

Per generalizzare l'esempio 0

$y'(x) = f(x)$. è un esempio di equazione differenziale

che ha come soluzione: $\boxed{y(x) = F(x) + c}$ dove $F(x)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

è una primitiva di f per esempio, $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$.

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \implies F'(x) = f(x)$$

Esempio 1: $y(x)$ è il numero di pesci che ci sono in un lago al tempo x. "tasso di crescita pari a 2".

cioè $y(x+h) - y(x) = 2 \cdot h\, y(x)$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = 2y(x) \implies \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{y(x+h) - y(x)}{h}}_{\overset{y'(x)}{\shortparallel}} = 2y(x)$$

(*) $\boxed{y'(x) = 2\,y(x).}$ Inoltre sappiamo $\boxed{y(0) = 4}$ pesci

EQ. DIFFERENZIALE DATO INIZIALE

La funzione $y(x) = e^{2x}$.

$$\boxed{y'(x) = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot y(x).}$$ verifica $\circledast$.

$$2e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1 \neq 4.$$

NON VERIFICA IL DATO INIZIALE

Ci sono altre soluzioni? Che forma hanno?

$y(x) = C e^{2x}$ è soluzione? Sì $\forall C \in \mathbb{R}$

Fisso una qualsiasi costante $C \in \mathbb{R}$

Calcoliamo il lato sinistro dell'equazione cioè

$$y'(x) = C e^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot C e^{2x} = 2 \cdot y(x).$$

Calcoliamo il lato destro : $2 \cdot C e^{2x}$.

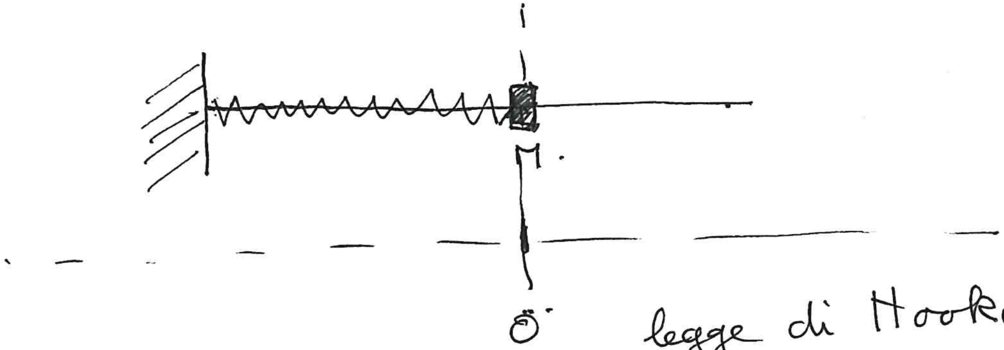
Tra tutte le soluzioni trovate scegliamo quella che verifica il dato iniziale cioè $\underline{y(0)} = Ce^{2 \cdot 0} = Ce^0 = C = \underline{\underline{4}}$. $\Rightarrow$

IV

La funzione che verifica sia l'equazione differenziale ($y' = 2y$) sia il dato iniziale ($y(0) = 4$) è la funzione $\boxed{y(x) = 4e^{2x}}$. Questa è soluzione ~~per~~ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dopo 3 giorni il numero di pesci nello stagno è $y(3) = 4 \cdot e^6 > 516$.

ESEMPIO 2: Oscillatore armonico.



$y(x)$ è il moto della massa attacata alla molla.

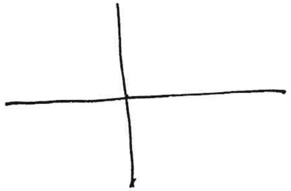
~~$y(x)$~~

legge di Hooke

$$\boxed{y''(x) = -k\,y(x).}$$

$k > 0$ è data.

dipende da: la molla. ~~e la massa~~



$$\boxed{y(x) = \cos(\sqrt{k}\,x)}$$

!!

$$y'(x) = -\sin(\sqrt{k}\,x)\cdot\sqrt{k}$$

$$y''(x) = -\sqrt{k}\cdot\cos(\sqrt{k}\,x)\cdot\sqrt{k} = -k\cdot\cos(\sqrt{k}\,x)$$

$$y''(x) = -k\,\underbrace{\cos(\sqrt{k}\,x)} = -k\cdot y(x) \longrightarrow \text{eq. differenziale.}$$

$$y(x) = \sin(\sqrt{k}\,x) \longrightarrow y'(x) = \cos(\sqrt{k}\,x)\cdot\sqrt{k}$$

$$y''(x) = -\sin(\sqrt{k}\,x)\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k} = -k\,\sin(\sqrt{k}\,x) = -k\,y(x).$$

VI

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x) = C_0 \cos(\sqrt{k}\,x) + C_1 \sin(\sqrt{k}\,x) \qquad \forall C_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}$$

Esercizio: Verificare che $y(x)$ è soluzione di $y'' = -ky$ $\forall x \in \mathbb{R}$ . .

$y'(x) \to y''$ e vedere se è uguale a $-k \cdot y$

Dato Iniziale $\boxed{y(0) = y_0 = 1}$ $\boxed{y'(0) = y_1 = 0}$

Devo trovare tra tutte le soluzioni quella che verifica il dato iniziale

Calcoliamo $y(0) = C_0 \cos 0 + C_1 \sin 0 = \boxed{C_0 = 1}$.

Calcolian $y'(x) = -C_0 \sin(\sqrt{k}\,x) \cdot \sqrt{k} + C_1 \cos(\sqrt{k}\,x) \cdot \sqrt{k}$.

$y'(0) = -C_0 \sin(0) \cdot \sqrt{k} + C_1 \cos(0) \cdot \sqrt{k} = C_1\sqrt{k} = 0$

$\Downarrow$

La SOLUZIONE $\boxed{y(x) = \cos(\sqrt{k}\,x)}$ $\boxed{C_1 = 0}$

Definizione Un equazione differenziale è una relazione tra la funzione y, le sue derivate fino all'ordine n, e eventualmente la variabile di stato: $x, y(x), y', y'', \ldots, y^n$:

$$\circledast \quad \boxed{g(x, y(x), y'(x), y'', \ldots, y^N(x)) = 0}$$

$y(x)$ è una soluzione di questa equazione differenziale in $I \subset \mathbb{R}$ se sostituendo $x, y(x), y'(x), \ldots, y^N(x)$ in ⊛ si ottiene l'uguaglianza $\forall x \in I$. (I è un intervallo). N ORDINE dell'equazione differenziale

~~Nota~~ Le equazioni differenziali del 1° ordine possono scriversi sempre nel seguente modo

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}.$$

Esempio 0: $y' = x^2$.

Esempio 1 $y' = 2y$.

Esempio 3 $\quad y' = 2y + x \iff \boxed{y'(x) = 2y(x) + x}$.

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

$y' = f(x, y)$

$y'(x) = f(x, y(x))$

Equazioni differenziali di ordine 1:

Trovare esplicitamente le soluzioni per 2 classi di ~~funzioni~~ equazioni differenziali

1°) Equazioni del 1° ordine lineari

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue.

Esempio 1 $\to \boxed{y' = 2y} \to a(x) = 2$ e $b(x) = 0$.

2°). Equazioni del 1° ordine a VARIABILI SEPARABILI:

$$\boxed{y'(x) = g(x) \cdot f(y)} \xRightarrow{f(y) \neq 0} \frac{y'}{f(y)} = g(x).$$

$f(y)$: solo y; $g(x)$: solo x.

Esempio 1 $\to \boxed{y' = 2y} \to g(x) = 2$ $f(y) = y$.

PROBLEMA DI CAUCHY per equazioni del 1° ordine

sono del seguente tipo:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f è data. x_0 dato, y_0 dato.

$y(x)$ è l'incognita.

È necessario che (x_0, y_0) siano nel dominio di esistenza di f: Esiste $f(x_0, y_0)$

Problema di Cauchy per equazioni del 2° ordine

sono del seguente tipo

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \leftarrow \text{dato} \\ y'(x_0) = y_1 \leftarrow \text{dato} \end{cases}$$

x_0 dato.

$y(x)$ è l'incognita.

$(x_0, y_0, y_1) \in$ dominio di f.

Le equazioni differenziali del secondo ordine: possono $\overline{X}$ scriversi:

$$\boxed{y''(x) = f(x, y(x), y'(x))}.$$

Esempio 2 $\quad y'' = -ky$

Esempio 4

$$\boxed{y'' = y' + 2y + x}.$$

$$\boxed{y'' = x^2}.$$

$$\boxed{y'' = xy'}$$

$$\boxed{y'' = \frac{x+y}{x-y'}}$$

XI

TEOREMA DI CAUCHY (1° ORDINE): Sia f una funzione continua nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ e tale che $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia continua in A.

allora $\forall (x_0, y_0) \in A$ esiste $I \subset \mathbb{R}$ e un'unica soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

nell'intervallo $I \ni x_0$.

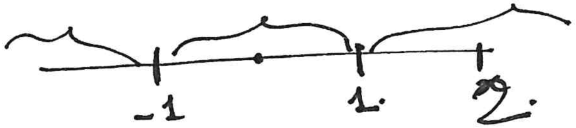
Teorema di Cauchy 2° ordine: Se f è continua in A aperto $\subset \mathbb{R}^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y'}$ sono continue in A

~~allora~~ allora $\forall (x_0, y_0, y_1) \in A$ esiste $I_\delta (x_0, y_0, y_1)$ e una unica soluzione in I_δ del problema di Cauchy

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} + 3 = \dfrac{2x}{x^2-1} \cdot y + 3. \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Equazione lineare



$a(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ $\qquad b(x) = 3.$

$y' = a(x)y + b(x)$

$$A(x) = \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{s}\,ds = \log|s| = \log|x^2-1|.$$

$s = x^2 - 1$

$ds = 2x\,dx$

Siccome il dato iniziale è in $2 > 1$. $\Longrightarrow$ $\boxed{x > 1}$ $\Longrightarrow x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow |x^2-1| = x^2 - 1.$

$$A(x) = \log|x^2-1| = \log(x^2-1).$$

$$y(x) = e^{(\log(x^2-1))} \cdot \int 3\, e^{-(\log(x^2-1))}\,dx. = (x^2-1)\,3 \int e^{\log(x^2-1)^{-1}}\,dx$$

$$= (x^2-1) \cdot 3 \int \frac{1}{x^2-1}\,dx.$$

$e^{\log a} = a \qquad e^{b \log a} = e^{\log a^b} = a^b.$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$$

LA STESSA COSA

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(x+1)}} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \boxed{\frac{x(a+b)+a-b}{(x-1)(x+1)}}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \qquad a=-b \qquad 2a=1 \qquad \boxed{\begin{array}{l} b=-\frac{1}{2}. \\ a=\frac{1}{2}. \end{array}}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right] \qquad x>1$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\log(x-1) - \log(x+1)\right) + C.$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C.$$

OSSERVAZIONE: $|x-1| = x-1$ dato che $x>1$. $|x+1| = x+1$ dato che $x>1$

per questo non ci sono i moduli nell'argomento del log.

$$y(x) = 3(x^2-1)\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = 3(x^2-1)\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c\right)$$

$$\text{(+)}\quad \boxed{y(x) = \frac{3}{2}(x^2-1)\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 3c(x^2-1). \quad \forall c \in \mathbb{R}}$$

È l'insieme delle soluzioni di

$$\boxed{y' = \frac{2xy}{x^2-1} + 3}$$ in $x \in (1, +\infty)$.

2°) Imponiamo il dato iniziale $y(2) = 0$

Calcoliamo usando (+)

$$y(2) = \frac{3}{2}(2^2-1)\cdot\log\left(\frac{2-1}{2+1}\right) + 3c(2^2-1).$$

$$= \frac{9}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right) + 9c = 0. \implies 9c = -\frac{9}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}\log(3)$$

incognita

$$c = \frac{1}{2}\log(3).$$

La soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2-1}y + 3 \\ y(2) = 0 \end{cases}$

$$y(x) = \frac{3}{2}(x^2-1)\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{3}{2}\log 3\cdot(x^2-1).$$ è sol. in $(1, +\infty)$

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{2}(x^2-1)\left(\log 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)}$$

Verificare che è soluzione del problema Cauchy

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$.

Esercizio:
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{x^2-1}\,y + 3. \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$x^2-1\Big|_{x=0} = 0-1 = -1 < 0$$

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$.

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{\cos x}{\sin x}\,y = x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Cerco la soluzione in $x \in (0, \pi)$.

$$\boxed{y'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}\,y + x.}$$

Eq. lineare

$$a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \qquad b(x) = x.$$

$$A(x) = \int -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\log|\sin x|$$

$0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x.$

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x} y + x \qquad a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \quad \Longrightarrow \quad A(x) = -\log(\sin x).$$

$$b(x) = x$$

$$y(x) = e^{-\log(\sin x)} \cdot \int x\, e^{\log(\sin x)} dx = \frac{1}{\sin x} \cdot \int x \sin x \, dx.$$

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$y(x) = \frac{1}{\sin x}\left[-x\cos x + \sin x + c\right] = -x\frac{\cos x}{\sin x} + 1 + \frac{c}{\sin x} = y(x)$$

Verifichiamo che y sia soluzione.

$$y'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} - x\left[\frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2}\right] - \frac{c}{\sin^2 x}\cos x = \boxed{-\frac{\cos x}{\sin x}} + \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$-\frac{\cos x}{\sin x} y + x = +\boxed{x\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} - \boxed{\frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} c + \boxed{x} = x\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1\right) + \dots$$

$$= \frac{x}{\sin^2 x} + \dots$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{0}{1} + 1 + c = 1$$

$$1 + c = 1 \implies c = 1 - 1 = 0.$$

$\boxed{y(x) = -x\frac{\cos x}{\sin x} + 1}$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{\cos x}{\sin x}y + x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$ nell'intervallo $(0, \pi)$.

<u>Esercizi</u> Esercizi 4.3. e 4.4. (Capitolo 4) page 168 – Costa Malusa