Ottimizzazione.

Teo di Fermat Se (x_0, y_0) è un pto di massimo o di minimo locale per una funzione f derivabile in (x_0, y_0) cioè tale che esiste un intorno $\boxed{I_\delta(x_0, y_0)}$ t.c. $\forall (x,y) \in I_\delta(x_0, y_0)$

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \qquad (\text{Max})$$

o

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \qquad (\text{Minimo})$$

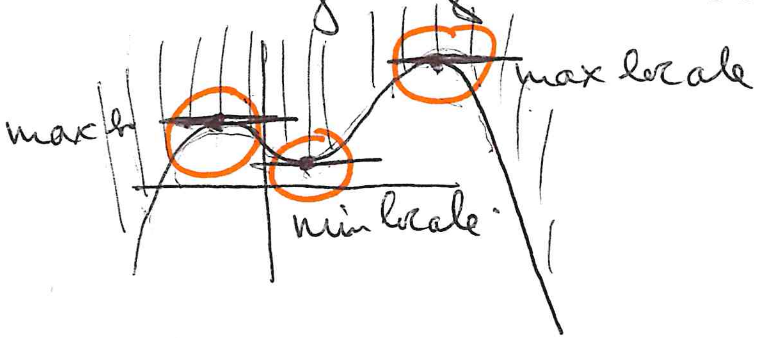
allora (x_0, y_0) è un punto critico cioè

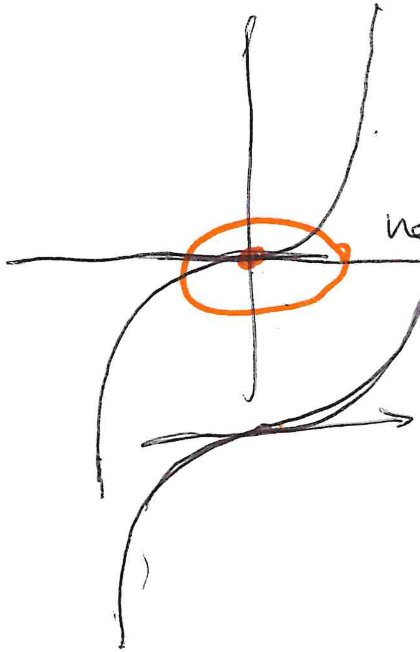
$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = (0, 0)$$

(Il viceversa in generale non è vero)

Si pone il problema di identificare tra i punti critici se ci sono punti estremali.

Caso delle funzioni reali.





Se f è una funzione reale tale che $f'(x_0)=0$ e:

se $f''(x_0)>0 \implies f(x_0)$ è un ~~punto di~~ minimo, x_0 è pt. di min.

Invece se $f''(x_0)<0 \implies f(x_0)$ è un punto di massimo

se $f''(x_0)=0$ non ho informazioni (tutti i casi sono possibili!).

Quindi introduciamo le derivate seconde per le funzioni di 2 variabili.

$$f(x,y) \xrightarrow[\text{possiamo calcolare}]{} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \end{cases} \\[6ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x,y) = x e^{xy^2} \to \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2} + x e^{xy^2} y^2 = (1+xy^2)e^{xy^2} \\[4ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy^2}(2xy) = 2x^2 y e^{xy^2} \end{cases}$$

III bis'

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = (1+xy^2)e^{xy^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\,e^{xy^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+xy^2)\,e^{xy^2}\right] = y^2e^{xy^2} + (1+xy^2)\,e^{xy^2}\cdot y^2 = \boxed{e^{xy^2}(2y^2+xy^4)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+xy^2)e^{xy^2}\right] = 2xy\,e^{xy^2} + (1+xy^2)\,e^{xy^2}\cdot 2xy = \boxed{e^{xy^2}(4xy+2x^2y^3)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y\,e^{xy^2}\right] = 4xy\,e^{xy^2} + (2x^2y)\,e^{xy^2}\,y^2 = \boxed{e^{xy^2}(4xy+2x^2y^3)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2x^2y\,e^{xy^2}\right] = 2x^2\cdot e^{xy^2} + 2x^2y\;e^{xy^2}\,2xy = \boxed{e^{xy^2}(2x^2+4x^3y^2)}$$

Teorema di Schwarz (SCHWARZ): Se $f(x,y)$ è due volte derivabile e se le derivate seconde sono continue allora

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)}$$

DEFINIZIONE

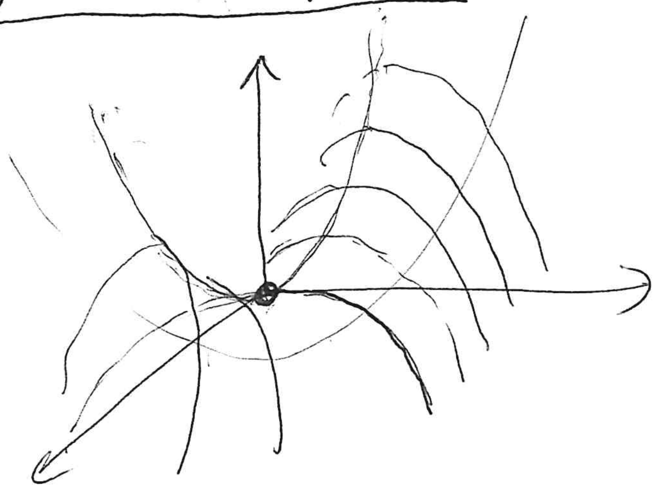
Matrice Hessiana 2×2

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} := Hf(x,y)$$

Schwarz $\Longrightarrow$ Matrice è simmetrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

I punti sella "assomigliano" all'origine della funzione

ESEMPIO 1 $\boxed{f(x,y) = x^2 - y^2.}$



$$\nabla f = (2x, -2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$$

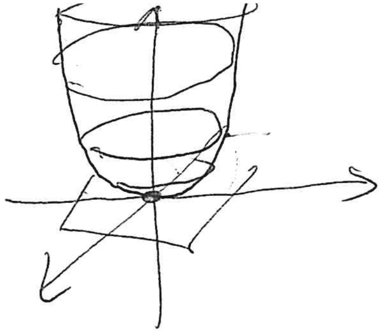
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 f = 2 \cdot (-2) = -4 < 0$$

$(0,0)$ verifica $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $\det D^2 f(0,0) = -4 < 0$

ESEMPIO 2)

$f(x,y) = x^2+y^2.$



$f(0,0)=0 \leq x^2+y^2.$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x=0, y=0)$

(1) L'unico punto critico è $(0,0)$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

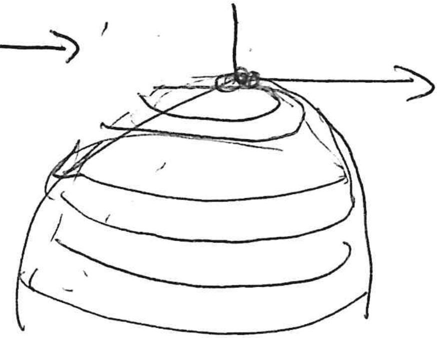
(2) $\det \nabla^2 f = 4 - 0 = 4 > 0$

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$

$(0,0)$ è un punto minimo

ESEMPIO 3

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 = -(x^2+y^2) \longrightarrow$$



$$f(0,0) = 0 \geq -x^2 - y^2.$$

$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y) = (0,0) \iff x=0,\ y=0$$

1 $(0,0)$ è l'unico punto critico.

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \Longrightarrow$$ 2 $\det D^2 f = 4 - 0 = 4 > 0.$

3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$

$\Downarrow$

$(0,0)$ è un punto di massimo

ESEMPIO 4 $\qquad f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$. $\qquad$ Punti critici ? $\qquad$ IX

$$\nabla f(x,y) = (2x + 2y,\ 4y + 2x)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \implies (x=0,\ y=0)$$

$\det = (8-4) = 4 \neq 0$ la soluzione unica

$(0,0)$ è l'unico punto critico.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \implies \det D^2 f(x,y) = 8 - 4 = 4 > 0$$

$(0,0)$ è estremale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

$(0,0)$ è un punto minimo

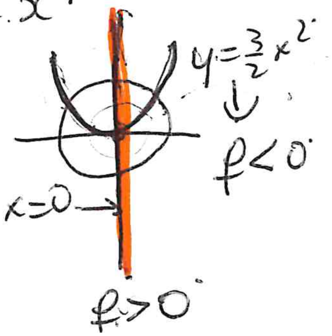
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 = \underbrace{(x+y)^2}_{x} + \underbrace{y^2}_{y}$$

$x + y = 0$

$y = -x$

Esercizi

$$f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = \left(y - \tfrac{3}{2}x^2\right)^2 - \tfrac{9}{4}x^4 + 2x^4$$
$$= \left(y - \tfrac{3}{2}x^2\right)^2 - \tfrac{1}{4}x^4$$



$$\nabla f(x,y) = ?$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -6xy + 8x^3 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$2x\left(-3y + 4x^2\right) = 0$$

$$y = \tfrac{3}{2}x^2$$

$x = 0 \implies y = 0$ $\quad (0,0)$ è un punto critico

$$2x\left(-\tfrac{9}{2}x^2 + 4x^2\right) = 2x\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) = 0 \implies$$ $(0,0)$ è l'unico punto critico

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6y + 24x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\nabla^2 f(0,0)\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$f(0,0) = 0$

Cyb

$(0,0)$ non è né di max né di minimo perché

$f\left(x, \tfrac{3}{2}x^2\right) = -\tfrac{1}{4}x^4 < 0 \quad x \neq 0$

$f(0,y) = y^2 > 0 \quad y \neq 0$