mercoledì 2 dicembre 2020 14:09

Equazioni differenziali

Def: E' un'equazione la cui incognita è una funzione, e che mette in relazione la funzione e le sue derivate. L'ordine dell'equazione differenziale è la derivata massima che è presente nell'equazione stessa. Un equazione di ordine N: Se $y(x)$ è l'incognita:

eq. di ordine N: $\underline{\underline{y^N}}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{N-1}(x))$

ORDINE

$N = 1 \to$ derivata prima

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

due classi specifiche di equazioni

1°) A variabili separabili

$$y'(x) = g(x) f(y)$$

2°) Equazioni lineari

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x)$$

$a(x)$ e $b(x)$ funzioni date.

ORDINE 2: $y'' = F(x, y, y')$

Equazioni lineari a coef. costanti

$$y'' + by' + cy = f(x), \quad b \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{R}$$

Problema di Cauchy per un equazione differenziale del primo ordine è dato da

$$\begin{cases} y' = F(x,y) & x \in T \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x_0 \in T$$

Esempio 0: $y'(x) = f(x)$ la ricerca di un $y(x)$ di cui conosco la derivata cioè la ricerca della primitiva di f.

(*) $y' = x^2 \implies y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$\forall C \in \mathbb{R}$

$y'(x) = x^2$ $y(x)$ è soluzione di (*)

$\rightarrow \infty$ soluzioni

(*)(*) $\begin{cases} y' = x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \implies$ L'eq. diff. $\longrightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

permette di trovare "C".

Tra tutte le infinite soluzioni dell'equazione differenziale scegliamo quella che verifica $y(1) = 2$

$$y(1) = \frac{1}{3} \cdot (1)^3 + C = 2$$

$$C = 2 - \frac{1}{3} \implies C = \frac{5}{3}$$

La soluzione del problema di Cauchy (*)(*)

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}$$

Per risolvere un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

primo passo: trovare tutte le soluzioni di $y' = F(x, y(x))$

secondo passo: Individuare quale tra le soluzioni verifica $y(x_0) = y_0$ sostituendo x_0 nell'espressione trovata nel primo passo.

Equazione del primo ordine a variabili separabili:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Esempio 1) $y' = Ky$ $\longrightarrow$ Eq. di Malthus per la crescita delle popolazioni $K \in \mathbb{R}$

$f(x) = K \in \mathbb{R}$

$g(y) = y$

Esempio 2) $\boxed{y' = Ky(M-y)} \longrightarrow y'(x) = Ky(x)(M - y(x))$

$f(x) = K$, $g(y) = y(M-y)$

Esempio 3) $y'_{(x)} = x \sin y = x \sin y(x)$

$f(x) = x$

$g(y) = \sin y$

OSS.: Non è detto che sia necessario scrivere la dipendenza di y dalla variabile

$\Rightarrow$ la variabile può essere scelta come ci piace

+ la variabile può essere scelta come ci piace di più cioè essere "x" oppure "t" oppure "ξ"...

$$y' = \underbrace{f(x)}\,\underbrace{g(\underline{\underline{y}})}$$

$y(x) \leftrightarrow y$ $\quad g(y) \to g(\underbrace{y(x)}_{\text{espressione in } x})$

$y' = x(x+y)$ **NON** È a Variabili Separabili.

$$(*) \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

1°) Passo: Cercare se esiste $\underline{\underline{y_0}} \in \mathbb{R}$ t.c. $g(y_0) = 0$

Se esiste allora una soluzione di $(*)$ è la funzione $\boxed{y(x) = y_0}$ costante

Verifichiamo che risolve $(*)$

$y'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y'(x) = 0 \overset{?}{=} f(x)\, g(y_0) =$

$= f(x) \cdot 0 = 0$

$\boxed{y(x) = y_0}$ $\forall x$ è soluzione di $(*)$

vale per tutti i valori t.c. $g(y_0) = 0$

2°) Passo $\quad y \neq \underline{y_0} \implies g(y) \neq 0$

$$(*) \implies \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

"abbiamo separato le variabili"

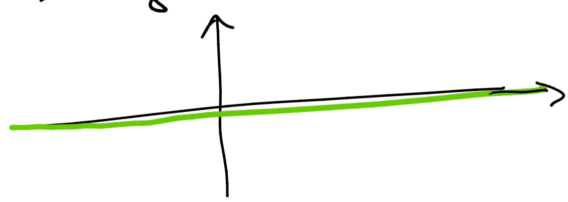
$$y' = x^2 y^3 \quad (+)$$

$f(x) = x^2 \quad g(y) = y^3$

1°) Passo: $g(y) = 0$

cioè $y^3 = 0 \implies y = 0$

quindi $\boxed{y(x) = 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $(+)$ in $\mathbb{R}$.



$y'(x) = x^2 y^3$

2°) $y \neq 0 \implies y^3 \neq 0$

$$\frac{y'(x)}{y^3(x)} = x^2$$

$\Updownarrow$

$g(y)$ ... separazione variabili"

solo la y — solo la x

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \qquad \forall x$$

la stessa funzione a sinistra e a destra dell'uguaglianza.
Allora sono uguali anche le loro primitive

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx$$

y non è noto. quindi così non possiamo integrare non conosciamo né $y(x)$ né $y'(x)$.

Basta integrare perché f è noto. $= F(x)$

$$\eta = y(x)$$

$$d\eta = y'(x)\,dx$$

$G(y(x))$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta$$

questo è un integrale in "η"
g è nota quindi possiamo integrare

$$\int \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta = G(\eta) = G(y(x))$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^3(x)}\,dx = \int x^2\,dx$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^3(x)}\,dx = \ ?$$

$$\boxed{\eta = y(x)}$$

$$d\eta = y'(x)\,dx \qquad \eta \text{ è la variabile}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^3(x)}\,dx = \boxed{\int \frac{1}{\eta^3}\,d\eta}$$

$$= \int \eta^{-3}\,d\eta = \frac{1}{-2}\eta^{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}y(x)^{-2} = \frac{-1}{2\,y(x)^2}$$

$$-\frac{1}{2\,y(x)^2} = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$\int g(y)$ ...

$$\Longrightarrow \boxed{G(y(x)) = F(x) + C} \quad (*)$$

"Sparita la $y'(x)$".

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx$$

3°) Trovare $y(x)$ cioè risolvere l'equazione in "y"

$$\Longrightarrow y(x) = G^{-1}(F(x)+c)$$

G^{-1} è la funzione inversa di G.

$$\boxed{-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C}$$

Fare delle operazioni in modo tale da trovare $y = \ldots\ldots$ che dip. solo da "x"

$$\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{3}x^3 - c$$

$$\Downarrow$$

$$2y^2 = \frac{1}{-\frac{1}{3}x^3 - c}$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}$$

Infinite soluzioni >0 $\longrightarrow$ $\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}}}$

Infinite soluzioni <0 $\longrightarrow$ $\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}}}$

Infinite perché $\forall C$ ho una soluzione

$\forall C$ tale che "~~per~~ qualche x" $-\frac{2}{3}x^3 - 2c > 0$.

$x=0 \Longrightarrow -2c>0 \Longrightarrow c<0$

$$\begin{cases} y'=y(1+x) \\ y(2)=-1 \end{cases}$$

$y'=y+xy$

$y'=y(1+x)=(1+x)y$

$f(x)=1+x \quad , \quad g(y)=y$

1°) $y=0 \Longrightarrow y(x)\equiv 0$ è sol.

2°) $\frac{y'}{y}=(1+x) \longrightarrow \underline{\underline{\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx}} = \underline{\underline{\int 1+x\,dx}}$

$\int 1+x\,dx = x+\frac{x^2}{2}+c.$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx \underset{\substack{\eta=y(x) \\ d\eta=y'(x)dx}}{=} \int \frac{1}{\eta}\,d\eta = \log|\eta| = \log|y(x)|$$

$$\boxed{\log|y(x)|=x+\frac{x^2}{2}+c.}$$

$|y(x)|=e^{x+\frac{x^2}{2}+c}=e^c e^{x+\frac{x^2}{2}}$

$y(x)=e^c e^{x+\frac{x^2}{2}} > 0$

$$y(x) = -e^{+c} e^{x+\frac{x^2}{2}} < 0$$

$$y(x) \equiv 0$$

$$y' = x^2 y^3 \begin{cases} \to y \equiv 0 \\ \to y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}} \quad > 0 \\ \to y(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}} \quad < 0 \end{cases}$$

Pb. di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y' = x^2 y^3 & \to \text{E.D.} \\ \boxed{y(1) = -2} & \to \text{Dato "iniziale"} \end{cases}}$$

$$y(1) = -2 < 0 \Longmapsto \boxed{y(x) = -\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}}}$$

devo scegliere tra le soluzioni negative dato che $y(1) = -2 < 0$.

$$y(1) = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{-\frac{2}{3}(1)^3 - 2c}} = -2}$$

Trovare "c" tale che sia verificata

$$\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3} - 2c}} = 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{-\frac{2}{3} - 2c}$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{2}{3} - 2c$$

$$-2c = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{}$$

$$-2c = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

$$y(x) = \frac{-1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 - 2c}} = \frac{-1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{12}}}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{12}}}}$$

Pb. di Cauchy $\boxed{\begin{cases} y' = x^2 y^3 \\ y(-2) = 0 \end{cases}} \Longrightarrow \boxed{y(x) \equiv 0}$

$y(-2) = 0$

$y'(x) = 0 = x^2 y^3 = x^2 \cdot 0 = 0$

$$\boxed{\begin{cases} y' = x^2 y^3 \\ y(1) = -2 \end{cases}} \Longrightarrow y(x) = -\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{12}}}$$

Dove è soluzione ? Per quale intervallo è soluzione.

→ 1°) L'intervallo deve contenere il punto iniziale cioè $1 \in I$.

→ 2°) La funzione "soluzione" sia definita nell'intervallo. cioè

$$\mathrm{dom}\left(\frac{-1}{\sqrt{\quad}}\right) = \{x \text{ t.c. } -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{12} > 0

$$\mathrm{dom}\left(\frac{-1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3+\frac{11}{12}}}\right)=\{x \text{ t.c. } -\frac{2}{3}x \ldots \frac{11}{12} \ldots$$

$$\frac{11}{12}>\frac{2}{3}x^3 \Longrightarrow \frac{33}{24}>x^3 \Longrightarrow x<\sqrt[3]{\frac{33}{24}}$$

$$I=\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{33}{24}}\right)$$

Eq. logistica: $y'=Ky(M-y)$ $\quad K=1, \quad M=1$

$y'=g(y)$

"Integrare un equazione differenziale significa trovare Tutte le soluzione"

$$⊛ \boxed{y'=y(1-y)} = g(y)=1\cdot g(y)$$

$f(x)=1$

$g(y)=y(1-y)$. $\Longrightarrow \underbrace{f(x)}\cdot\underbrace{g(y)}=\boxed{y(1-y)}$

Si tratta di una eq. a Variabili separabili

1°) $\underline{g(y)=0} \Longrightarrow \boxed{y(1-y)=0} \longrightarrow y=0, \quad y=1$

$\Longrightarrow y(x)\equiv 0 \quad \forall x$ è soluzione costante di ⊛

$y(x)\equiv 1 \quad \forall x$ è soluzione costante di ⊛.

2°) $y\neq 0, \quad y\neq 1 \Longrightarrow y(1-y)\neq 0$

$$y'=y(1-y) \Longrightarrow \boxed{\frac{y'}{y(1-y)}=1} \Longrightarrow \int\frac{y'(x)}{y(x)(1-y(x))}dx=\int 1\,dx$$

$$\int 1\,dx = x+c$$

$\boxed{\eta=y(x)} \longrightarrow d\eta=y'(x)dx$

$$\int\frac{y'(x)}{y(x)(1-y(x))}dx=\int\frac{1}{\eta(1-\eta)}d\eta=\int\frac{1}{\eta}+\frac{1}{1-\eta}\,d\eta$$

$$= \log|\eta|-\log|1-\eta|=\boxed{\log\left|\frac{\eta}{1-\eta}\right|}=\boxed{\log\left|\frac{y(x)}{1-y(x)}\right|}$$

$$= \log|y| - \log|1-y| = \log\left|\frac{y}{1-y}\right| = \log\left|\frac{y}{1-y(x)}\right|$$

$$\boxed{\log\left|\frac{y(x)}{1-y(x)}\right| = x + c} \xrightarrow{\exp}$$

$$\left(\log(1-y)\right)' = \frac{-1}{1-y}$$

Per togliere il modulo devo studiare il segno dell'argomento

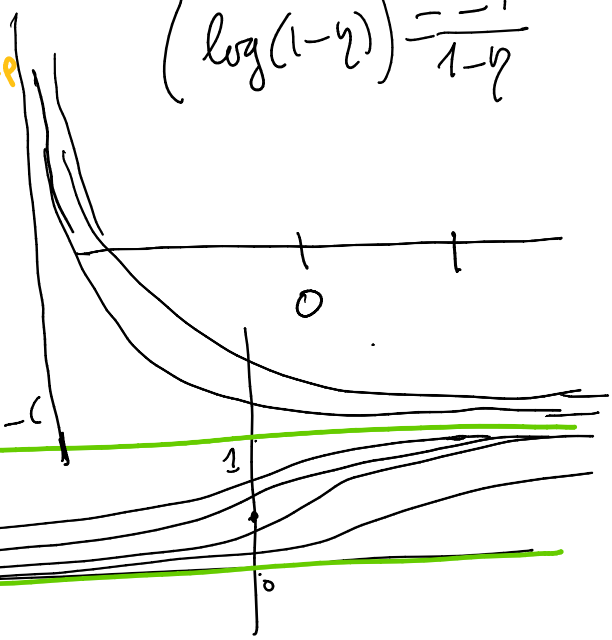
$$\boxed{\left|\frac{y(x)}{1-y(x)}\right| = e^{x+c}}$$

$$0<y<1 \implies 0 < \frac{y(x)}{1-y(x)} = e^{x+c}$$

$$y(x) = e^c e^x [1 - y(x)]$$

$$y(x)[1+e^c e^x] = e^c e^x$$

$$0 < \boxed{y(x) = \frac{e^c e^x}{1+e^c e^x}} < 1.$$



Confrontate

$$C_0 = e^c \implies y(x) = \frac{C_0 e^x}{1 + C_0 e^x}$$

$$y(x) > 1,\quad y(x) < 0 \implies \frac{y(x)}{1-y(x)} = -e^{x+c} = -e^c e^x$$

$$y(x) = -e^c e^x (1 - y(x))$$

$$y(x)(1 - e^c e^x) = -e^{+c} e^x \qquad 1 - e^c e^x \neq 0$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{e^{+c} e^x}{1 - e^c e^x}} \to \boxed{(-c, +\infty)}$$

$$1 - e^c e^x \neq 0 \qquad e^x \neq e^{-c} \qquad \boxed{(-\infty, -c)}$$

$$\boxed{x \neq -c}$$

4 poss. a) $y(x) \equiv 0$

b) $y(x) \equiv 1$

c) $y(x) = \dfrac{e^c e^x}{1 + e^c e^x}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{0 < y < 1}$

d) $y(x) = -\dfrac{e^c e^x}{1 - e^c e^x}$ $\quad \boxed{y > 1}$ $\boxed{y < 0}$

Si sceglie il caso giusto confrontando il valore del pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Se $y_0 = 0 \Longmapsto y \equiv 0$

Se $y_0 = 1 \Longmapsto y \equiv 1$

Se $0 < y_0 < 1 \Longmapsto y(x) = \dfrac{e^c e^x}{1 + e^c e^x}$ $\longleftarrow$

Se $y_0 > 1$ o $y_0 < 0 \Longmapsto y(x) = -\dfrac{e^c e^x}{1 - e^c e^x}$

$$\boxed{\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}} \qquad 0 < \frac{1}{2} < 1 \Longmapsto \boxed{y(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$y(0) = \frac{e^c e^0}{1 + e^c e^0} = \frac{1}{2}$$

$$- \, e^c \qquad - 1 \Longmapsto e^c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^c$$

$$= \frac{e^c}{1+e^c} = \frac{1}{2} \implies e^c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^c$$

$$\frac{1}{2}e^c = \frac{1}{2}$$

$$e^c = 1$$

$$\boxed{\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(3) = 1 \end{cases}} \qquad \boxed{y(x) \equiv 1}$$

$$\boxed{\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(2) = 4 \end{cases}} \longrightarrow y(x) = \frac{-e^c e^x}{1 - e^c e^x}$$

$$y(2) = \frac{-e^c e^2}{1 - e^c e^2} = 4$$

$$-e^c e^2 = 4(1 - e^c e^2)$$

$$3e^c e^2 = 4$$

$$e^c = \frac{4}{3e^2} = \frac{4}{3}e^{-2}$$

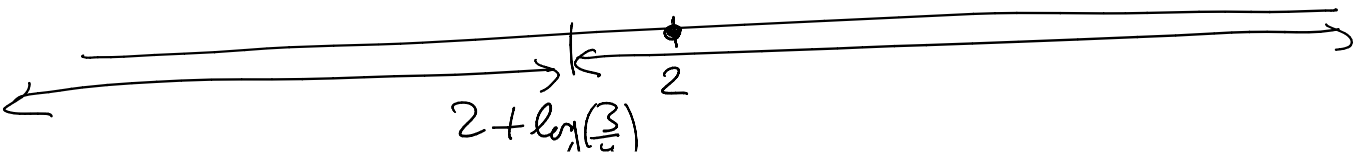
$$y(x) = \frac{-\frac{4}{3}e^{-2}e^x}{1 - \frac{4}{3}e^{-2}e^x} = \frac{-4e^{x-2}}{3 - 4e^{x-2}}$$

$3 - 4e^{x-2} \neq 0$ cioè $3 \neq 4e^{x-2}$

$$\frac{3}{4} \neq e^{x-2}$$

$$x - 2 \neq \log\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x \neq 2 + \log\left(\frac{3}{4}\right)$$



$2+\log\left(\frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ 2

$$y(x) = \frac{-4e^{x-2}}{3-4e^{x-2}}$$ è soluzione in $\left(2+\log\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right)$

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+c$$

$$y = y(x)$$

$$y = y(x) \to dy = y'(x)\,dx$$

$$\boxed{G(y) = F(x) + c}$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{g(y)} = f(x)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$