mercoledì 11 novembre 2020 14:08

es

# OTTIMIZZAZIONE

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) \qquad \text{oppure}$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y)$$

$(x_0, y_0) = P_0$ è un pto di minimo locale, minimo interno se $\exists\, \delta$ t.c. $\forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \subset D$

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

$(x_0, y_0) = P_0$ è un pto di massimo locale o massimo interno se $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$\forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \subset D$$

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

$$\boxed{\text{Teorema di Fermat} \quad \text{Nei pti di max o min locale } \nabla f(x_0,y_0) = (0,0)}$$

Inoltre: Se $\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = 0}$ e $D^2 f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

verifica

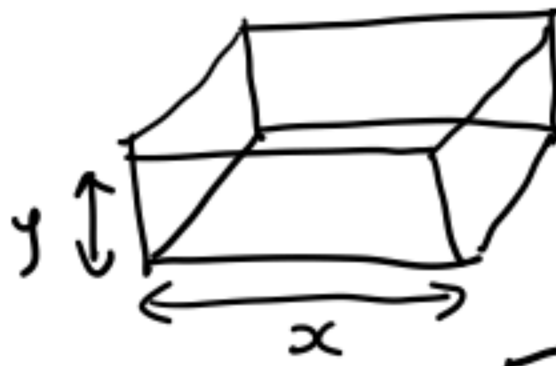
1°) $\det D^2 f(x_0,y_0) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(x_0,y_0) > 0$ $\implies$ $(x_0,y_0)$ è un pto di minimo locale

2°) $\det D^2 f(x_0,y_0) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(x_0,y_0) < 0$ $\implies$ $(x_0,y_0)$ è un p.to di massimo locale

3°) $\det D^2 f(x_0,y_0) < 0 \overset{\text{Def}}{\implies}$ $(x_0,y_0)$ è un pto di sella

quindi non è né di massimo, né di minimo.

4°) $\boxed{0 = \det D^2 f(x_0,y_0)}$ non ho informazioni nel senso che potrebbe sia essere max che di min, che nessuno dei due!




$\boxed{S = x^2+4xy}$ (+)

Dato del problema

max Volume $=$ max $\boxed{x^2y}$ sui p.ti che verificano la condizione (+)

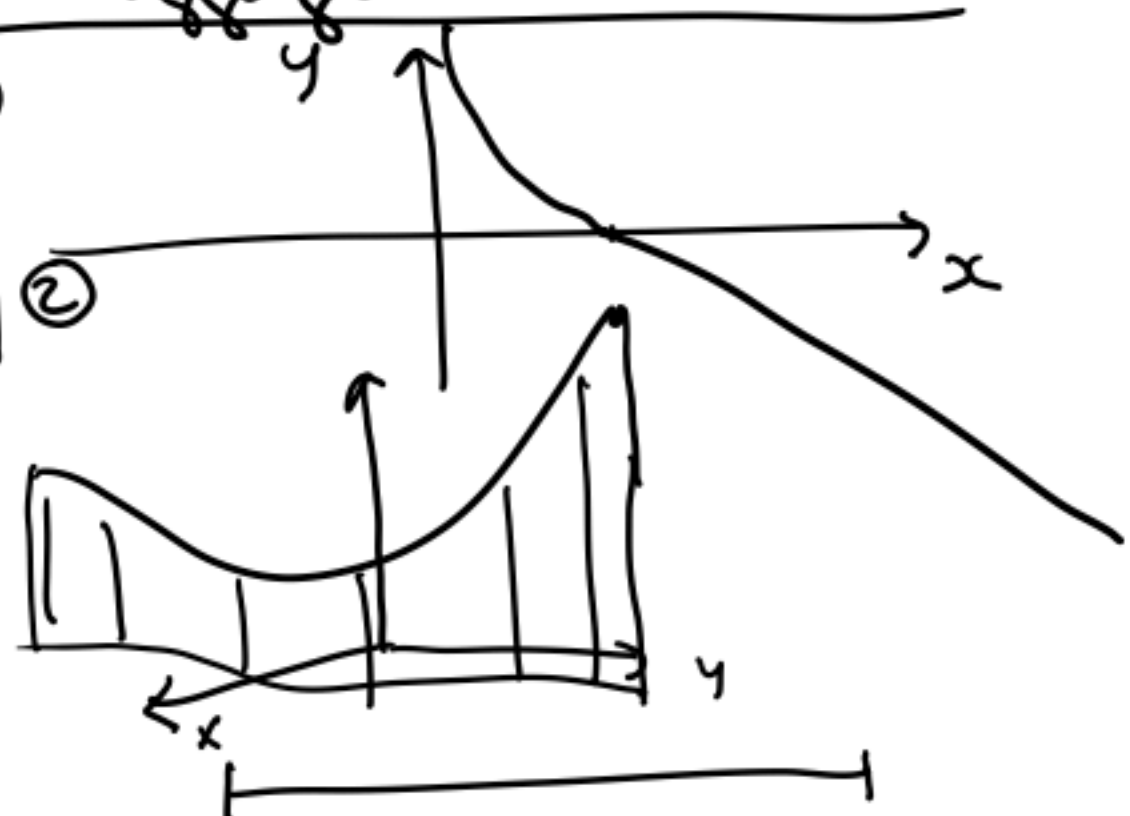
## Ottimizzazione vincolata

VINCOLO

$\boxed{S=x^2+4xy}$ ①

$\boxed{y=\frac{S-x^2}{4x}}$ ②

$y=\frac{S}{4x}-\frac{x}{4}$




$f(x,y)=x^2 y$

Restringere $f$ alla curva $S=x^2+4xy$ è uguale a restringere $f$ alla curva $y=\frac{S-x^2}{4x}$ cioè considerare la funzione

$$g(x)=f\Big(x,\underbrace{\frac{S-x^2}{4x}}_{y}\Big)=x^2\underbrace{\Big(\frac{S-x^2}{4x}\Big)}_{y}$$

$g$ è il volume della costruzione se la base è un quadrato di lato $x$ e i muri hanno un'altezza pari a $\frac{S-x^2}{4x}$ cioè la superficie dei muri e del tetto è esattamente $S$.

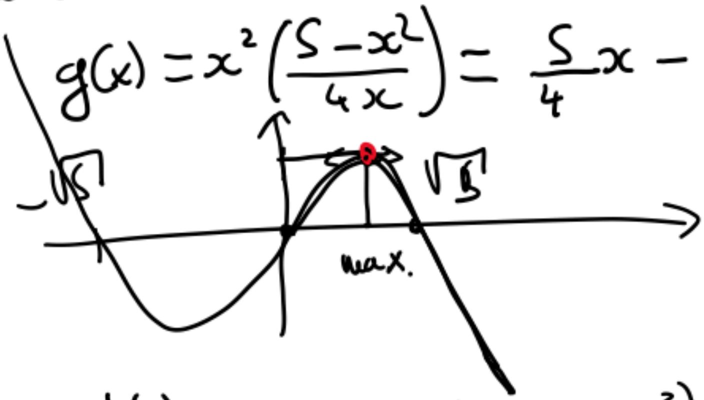
Lo scopo è massimizzare il volume pertanto dobbiamo massimizzare $g$.

$$g(x)=x^2\Big(\frac{S-x^2}{4x}\Big)=\frac{S}{4}x-\frac{x^3}{4}=\frac{1}{4}\big(Sx-x^3\big)$$


$x>0$

Lo scopo è massimizzare il volume pertanto dobbiamo massimizzare g.

$$g(x) = x^2\left(\frac{S-x^2}{4x}\right) = \frac{S}{4}x - \frac{x^3}{4} = \frac{1}{4}\left(Sx - x^3\right)$$



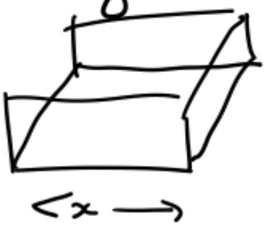

$x > 0$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4}\left(S - 3x^2\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{S}{3}$$

$$x = \cancel{\pm}\sqrt{\frac{S}{3}}$$




$$x = \sqrt{\frac{S}{3}} \Longrightarrow y = \frac{S - x^2}{4x}$$

$$x > \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{S} = y = \frac{S - \frac{S}{3}}{4\sqrt{\frac{S}{3}}} = \frac{\sqrt{S}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{S}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathrm{Vol}: \left(\sqrt{\frac{S}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{S} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{S^{3/2}}{\sqrt{3}\cdot 6}$$

---

In generale se $\gamma$ è una curva del piano (potrebbe essere il grafico di una funzione oppure una curva parametrica.).

Per trovare il massimo o il minimo di $f(x,y)$ $\boxed{\text{vincolato}}$ a $\gamma$ $\longrightarrow$ Si sostituisce l'espressione che determina $\gamma$ nella funzione $f$:

$$\gamma \triangleq (x(t), y(t)) \longrightarrow g(t) = f(\underbrace{x(t)}_{x}, \underbrace{y(t)}_{y})$$

$h(x) = y$

$$\text{Se } \gamma = (x, h(x)) \longrightarrow g(x) = f(x, \underbrace{h(x)}_{y})$$

$$\text{Se } \gamma = (k(y), y) \longrightarrow g(y) = f(\underbrace{k(y)}_{x}, y)$$

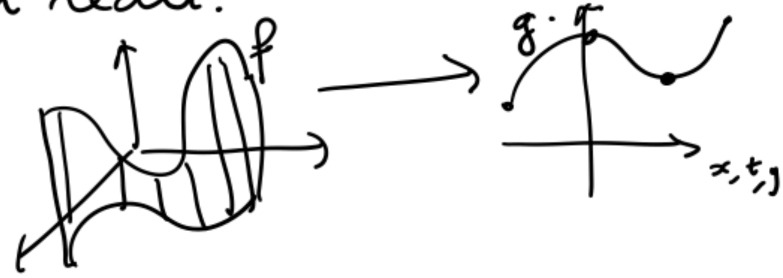
$: \gamma(t) = (x(t), y(t)) \longrightarrow g(t) = f(\underset{x}{x(t)}, \underset{y}{y(t)})$

$\cancel{x}$ Se $\gamma = (x, h(x)) \longrightarrow g(x) = f(x, \underbrace{h(x)}_{y})$

$h(x) = y$

$\cancel{x}$ Se $\gamma = (\underbrace{k(y)}_{x}, y) \longrightarrow g(y) = f(\underbrace{k(y)}_{x}, y)$

ci si riduce a una funzione variabile e si procede come per lo studio delle funzioni reali.



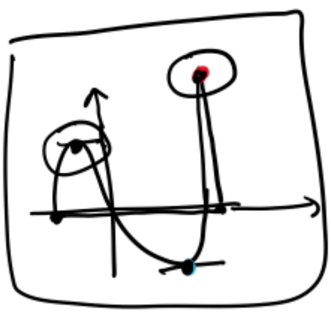

<u>Ricordarsi</u> $g(t) = f(x(t), y(t))$ allora

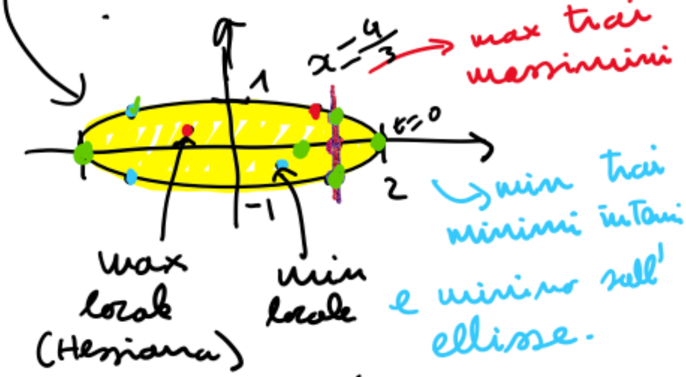
$$g'(t) = \nabla f \cdot (x'(t), y'(t))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$$

---

$\boxed{\text{Es. 3.7 pag. 112}}$ Determinare i pti di massimo o di minimo <u>assoluto</u> della funzione $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$ in $D = \{(x,y),\ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1}$$






Punti vincolati all'ellisse

$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$

1°) Passo ricerca di <u>max e min. locali</u>

cioè $\nabla f = (2x - 2, 2y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \longrightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 2y = 0 \longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

1°) Passo ricerca di max e min. locali

cioè $\nabla f = (2x-2, 2y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x-2=0 \longrightarrow 2x=2 \rightarrow x=1 \\ 2y=0 \longrightarrow y=0 \end{cases}$$

Unico p.to critico è $(1,0)$

$$f(1,0) = 1-2+0 = -1$$

potrebbe essere un p.to di max o di min interno.

2°) Max e min vincolato quindi

$$\gamma: \ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

restringere $f$ a $\gamma$ $\quad x \longrightarrow 2\cos t$, $\; y \longrightarrow \sin t$

$$f(x,y) = x^2-2x+y^2 = 4\cos^2 t - 4\cos t + \sin^2 t$$
$$= g(t) = 3\cos^2 t + \cos^2 t - 2\cdots$$

$$\boxed{g(t) = 3\cos^2 t - 4\cos t + 1} \quad t\in[0,2\pi]$$

$g(0)$, $g(2\pi)$

$$g'(t) = -6\cos t\sin t + 4\sin t$$
$$= 2\sin t\,[-3\cos t + 2] = 0$$

$\boxed{\sin t = 0}$ e $\quad -3\cos t + 2 = 0$

$$\boxed{\cos t = \frac{2}{3}}$$

$t=0$, $\quad t=\pi$, $\quad \cancel{t=2\pi}$

$$\cos t = \boxed{\frac{x}{2}} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

$P=(x,y)$

$(x,y)$ dove appartenere all'ellisse e $x=\frac{4}{3}$

$$\boxed{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$
$$= 1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\left(\frac{4}{3}, \sqrt{\frac{5}{9}}\right), \quad \left(\frac{4}{3}, -\sqrt{\frac{5}{9}}\right)$$

$\boxed{P_1 = (1, 0)}$ $\quad P_2 = (2, 0)$, $\quad P_3 = (-2, 0)$

$P_4 = \left(\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $\quad P_5 = \left(\frac{4}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$

Il massimo e il minimo assoluti sono perforza uno di questi 5 punti.

$$f(P_1), f(P_2), f(P_3) \dots, f(P_5)$$

Il più grande è il massimo assoluto.

Il più piccolo è il minimo assoluto.

$f(P_1) = f(1,0) = 1 - 2 + 0 = -1 \leftarrow$ min

$f(P_2) = f(2,0) = 4 - 4 + 0 = 0$

$f(P_3) = f(-2,0) = 4 + 4 + 0 = 8 \leftarrow$ max

$f(P_4) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{16}{9} - \frac{8}{3} + \frac{5}{9} = \frac{21-24}{9} = -\frac{1}{3}$

$f(P_5) = f\left(\frac{4}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{16}{9} - \frac{8}{3} + \frac{5}{9} = -\frac{1}{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} \min_D f(x,y) &= f(1,0) = -1 \\ \max_D f(x,y) &= f(-2,0) = 8 \end{aligned}}$$

---

Esercizio 3.7 — 5)

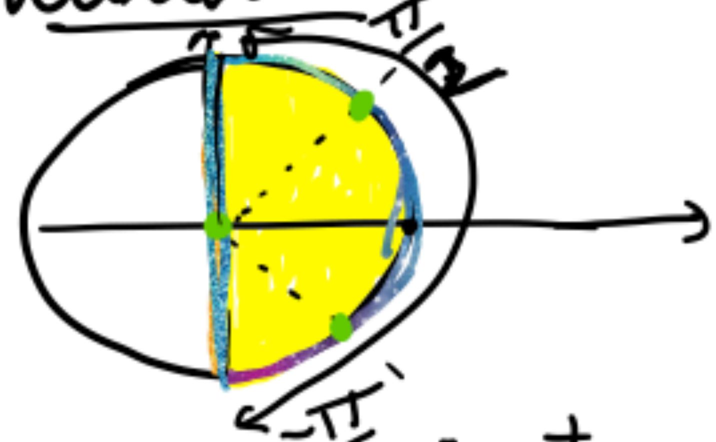
$f(x,y) = e^{-xy}$ trovare massimo e minimo assoluto di $f$ in $D$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0\}$$

Teorema Weierstrass Se $D$ è un insieme chiuso e limitato e se $f$ è una funzione continua in $D$ allora $f$ ammette massimo e minimo in $D$.

**Teorema Weierstrass** Se $D$ è un insieme **chiuso** e **limitato** e se $f$ è una funzione continua in $D$ allora $f$ ammette **massimo** e **minimo** in $D$.

D :




1°) P.ti di max o min interni → trai punti critici di $f(x,y) = e^{-xy}$

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = \left(-y e^{-xy}, -x e^{-xy}\right)$$

$$= -e^{xy}(y, x)$$

$P_1 = (0,0)$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f(0,0) = e^{-0} = 1}$

Nella zona gialla, cioè nell'interno non ci sono punti di massimo o di minimo.

2°) **Sul bordo**. Il bordo è costituito da due parti → il cerchio → → asse delle y

semi cerchio → $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$


$$g(t) = f(x(t), y(t)) = e^{-\underbrace{\cos t}_{x} \cdot \underbrace{\sin t}_{y}}$$

$g(-\frac{\pi}{2})$

$g(\frac{\pi}{2})$

$$g'(t) = -e^{-\cos t \sin t}\left[-\sin t \cdot \sin t + \cos t \cos t\right]$$

$$= -e^{-\cos t \sin t}(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0$$

$\cos^2 t = \sin^2 t$ → $\cos t = \sin t \to x = y$
$\cos t = -\sin t \to x = -y$

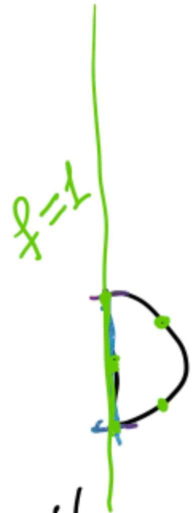
$x = y$ → $x = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 + y^2 = 1$ $P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x=y \longrightarrow x = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2+y^2=1$

$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$




$x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -y$

$P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P_4 = (0, 1)$

$P_5 = (0, -1)$

L'asse delle y $\longrightarrow$ $\boxed{x=0}$, $-1 \le y \le 1$

$$f(0,y) = e^{-0\cdot y} = \boxed{1}$$

I punti candidati a realizzare il massimo o minimo assoluto sono $\boxed{x=0}$

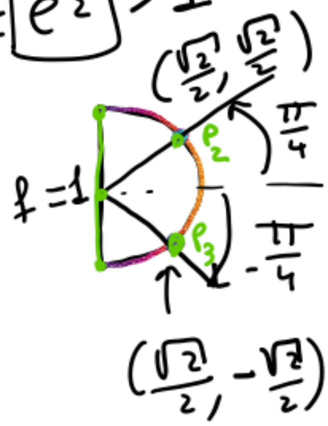
$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$f(P_2) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{e^{-\frac{1}{2}}} < 1$$

$$f(P_3) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{e^{\frac{1}{2}}} > 1$$

$$\min_D f = f(P_2) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\max_D f = f(P_3) = e^{\frac{1}{2}}$$




**Esercizio**

$$f(x,y) = (x-y)(x+3y)(x+1) \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

Punti di massimo e minimo locale

1°) Passo trovare i punti critici

$$\nabla f(x,y) = 0$$

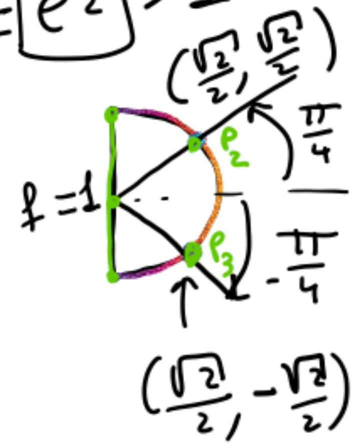
2°) Passo calcolare $D^2 f$ nei p.ti critici per det. se sono max, min o di sella

I punti candidati a selezione il massimo o minimo assoluto sono $\boxed{x=0}$

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad e \quad P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(P_2) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{e^{-\frac{1}{2}}} < 1$$

$$f(P_3) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{e^{\frac{1}{2}}} > 1$$




$$\min_D f = f(P_2) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\max_D f = f(P_3) = e^{\frac{1}{2}}$$

**Esercizio**

$$f(x,y) = (x-y)(x+3y)(x+1) \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

Punti di massimo e minimo locale

1°) Passo trovare i punti critici
$$\nabla f(x,y) = 0$$

2°) Passo calcolare $D^2 f$ nei pti critici per det. se sono max, min o di sella

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+3y)(x+1) + (x-y)(x+1) + (x-y)(x+3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x+1)\cdot\left[-(x+3y) + (x-y)3\right]$$
$$= (x+1)(2x-6y)$$

$$\begin{cases} (x+3y)(x+1) + (x-y)(x+1) + (x-y)(x+3y) = 0 \\ (x+1)(2x-6y) = 0 \longrightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

$2x = 6y$

$\boxed{x = 3y}$

$$\boxed{x=-1} \xrightarrow{\text{sost.}} (-1-y)(-1+3y) = 0 \longrightarrow y=-1 \text{ o } y=\frac{1}{3}$$

$$P_1 = (-1,-1) \quad e \quad P_2 = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

$\boxed{x=3y} \xrightarrow{\text{sost.}}$ $6y\cdot(3y+1)+2y(3y+1)+2y\cdot 6y=0$

$2y[9y+3+3y+1+6y]=0$

$2y[18y+4]=0$

$y=0$ oppure $18y+4=0$

$x=3y$ $\Downarrow$ $x=0$

$y=-\frac{4}{18}=-\frac{2}{9}$

$x=3y$ $\Downarrow$ $x=-\frac{2}{3}$

$P_3=(0,0)$ e $P_4=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}\right)$

Il valore della funzione non permette di determinare la natura del p.to critico

$$D^2f=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=(x+1)(2x+2y)+(x-y)(x+3y)$

$=2(x^2+x+xy+y)$

$+(x^2-3y^2-yx+3xy)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y^2+4xy+2x+2y$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2-6xy+2x-6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x+4y+2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-6y+4x+2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6x-6$

**Calcolando l'Hessiana sui punti critici trovati precedentemente otteniamo:**

P1) $D^2f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

$\det D^2f(0,0)=-12-4=-16<0$

$(0,0)$ è un p.to di sella

P2) $D^2f(-1,-1)=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(2x+2y) + (x-y)(x+3y)$$
$$= 2(x^2+x+xy+y)$$
$$+ (x^2-3y^2-yx+3xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3y^2+4xy+2x+2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2-6xy+2x-6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x+4y+2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6y+4x+2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x-6$$

Calcolando l'Hessiana sui punti critici trovati precedentemente otteniamo:

P1) $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

$\det D^2 f(0,0) = -12-4 = -16 < 0$

$(0,0)$ è un p.to di sella

P2) $D^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det D^2 f = 0 - 16 = -16 < 0$

$(-1,-1)$ è un p.to di sella

P3) $D^2 f(-1,\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -4+\frac{4}{3} & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det D^2 f(-1,\frac{1}{3}) = -16 < 0$

p.to di sella

ETC.....