ISTITUZIONI DI MATEMATICA II, BIRINDELLI

Cognome	Nome	Crediti

REGOLE D'ESAME
i) IL COMPITO DEVE ESSERE SVOLTO SU QUESTI FOGLI, CHE SONO GLI UNICI AD ESSERE CONSEGNATI AL DOCENTE PER LA CORREZIONE

Esercizio 1 Sia la curva parametrizzata $\varphi(t) = (t\cos 4t, 1 + t\sin 4t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

a) *Calcolare* $\varphi(0)$*, e* $\varphi(\frac{\pi}{2})$*. Dire se* φ *è chiusa.*

$\varphi(0) = (0\cos 40, 1 + 0\sin 40) = (0, 1)$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}\cos 4\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\sin 4\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 1)$. Per vedere se φ è chiusa devo calcolare $\varphi(2\pi) = (2\pi\cos 8\pi, 1 + 2\pi\sin 8\pi) = (2\pi, 1)$, quindi $\varphi(0) \neq \varphi(2\pi)$ e la curva non è chiusa.

b) *Determinare se* $(0, 2)$ *appartiene al supporto della curva*

Perché succeda deve esistere un valore $t \in (0, 2\pi)$ tale che $\begin{cases} 0 = t\cos 4t \\ 2 = 1 + t\sin 4t \end{cases}$

La prima equazione impone $t = 0$ e tutti valori di t che annullano il coseno. Se il coseno si annulla allora il seno vale 1 o -1 quindi la seconda equazione diventerebbe $2 = 1 + t$ quindi $t = 1$ ma per $t = 1$ non si ha $cos4t = 0$ quindi il punto non appartiene alla curva.

c)*Trovare l'intersezione della curva con gli assi cartesiani*

Quindi dobbiamo risolvere $t\cos 4t = 0$ e anche $1 + t\sin 4t = 0$.

$$t\cos 4t = 0 \Rightarrow t = 0, t = \frac{\pi}{8}, t = \frac{3\pi}{8}, t = \frac{5\pi}{8}, t = \frac{7\pi}{8}, \cdots, t = \frac{15\pi}{8}$$

$$1 + t\sin 4t = 0 \Rightarrow t\sin(4t) = -1$$

d) *Determinare se la curva è semplice*

Osservi che $\varphi(t) - (0, 1) = (t\cos 4t, t\sin 4t)$, quindi $|\varphi(t) - (0, 1)|^2 = t^2$. Quindi la distanza della curva da $(0, 1)$ è strettamente monotona crescente e quindi la curva è semplice.

e) *Calcolare la lunghezza della curva*

$\varphi'(t) = (-4t\sin(4t)+\cos(4t), 4t\cos(4t)+\sin(4t))$ quindi $|\varphi'(t)| = \sqrt{16t^2 + 1}$ quindi la lunghezza della curva è

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{16t^2 + 1}dt = \frac{1}{8}(\log(\sqrt{16t^2 + 1} + 1) + 4t\sqrt{16t^2 + 1})|_0^2 pi$$

f) *Determinare se esiste t tale che la tangente alla curva è verticale.*

La tangente alla curva è verticale se la prima componente della derivata è nulla quindi se $-4t\sin(4t)+\cos(4t)=0$ i.e. $\tan(4t)=\frac{1}{4t}$ per ogni intervallo $[0,\frac{\pi}{16}]$ e $[\frac{\pi}{16},\frac{3\pi}{16}]$ etc... c'è un punto di intersezione; in ognuno di quei punti la tangente è verticale.

Esercizio 2 Calcolare $f(x_o, y_o)$. Determinare e disegnare il dominio delle funzioni in a, b, c. Per quelle in d ed "e" disegnare gli insiemi di livello -1 e 0.

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ e $(x_o, y_o) = (1,3)$
$f(1,3) = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ inotlre il dominio richiede $x + y \geq 0$ cioè i punti sopra alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
b) $f(x,y) = \sqrt{e^y - x}$ e $(x_o, y_o) = (\frac{1}{2}, 0)$.
$f(\frac{1}{2}, 0) = \sqrt{e^0 - \frac{1}{2}} = \sqrt{1}2$, dominio $e^y - x \geq 0$ che è equivalente a $e^y \geq x$ cioè $y \leq \log x$ quindi il sotto grafico della funzione logaritmo.
c) $f(x,y) = \log\left(\frac{x^2-y^2}{y-(1-x^2)^2}\right)$e $(x_o, y_o) = (1, \frac{1}{2})$
$f(1, \frac{1}{2}) = \log\left(\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-(1-1^2)^2}\right) = \log(\frac{3}{2})$ Richiesta del dominio, $\frac{x^2-y^2}{y-(1-x^2)^2} > 0$ e $y - (1-x^2)^2 \neq 0$ Vedi disegno allegato
d) $f(x,y) = cos(\sqrt{x^2+y^2})$, e $(x_o, y_o) = (1,3)$

e) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, e $(x_o, y_o) = (1,3)$

Esercizio 3 Per le seguenti funzioni determinare i punti critici e la loro natura a) $f(x,y) = xy - 3x^2y$

I punti critici sono i punti dove $\nabla f(x,y) = (y(1-6x), x - 3x^2) = (0,0)$. La prima equazione $y(1-6x) = 0$ implica $y = 0$ o $x = \frac{1}{6}$. La seconda richiede $x - 3x^2 = 0$ cioè $x = 0$ o $x = \frac{1}{3}$. Quindi la soluzione $x = \frac{1}{6}$ è da scartare perché non si annullerebbe la derivata rispetto ad y. Conclusione i punti critici sono $P_o = (0,0)$ e $P_1 = (\frac{1}{3}, 0)$. Calcoliamo la matrice Hessiana per determinarne la natura. Si ottiene

$$D^2 f = \begin{pmatrix} -6y & (1-6x) \\ (1-6x) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{detD^2f(x,y) = -(1-6x)^2 < 0}$$

per $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$. Si tratta dunque di due punti di sella.

b) $f(x,y) = xe^{x^2y+y^2}$.

In modo analogo, $\nabla f(x,y) = (e^{x^2y+y^2}(1+2xy), e^{x^2y+y^2}x(x^2+2y)) = (0,0)$, implica $(1+2xy, x(x^2+2y)) = (0,0)$ La seconda equazione $x(x^2+2y) = 0$ implica che $x = 0$ oppure $y = -\frac{x^2}{2}$. $x = 0$ non annulla la prima componente quindi sostituiamo $y = -\frac{x^2}{2}$ nella prima equazione che diventa $1 - x^3 = 0$ cioé $x = 1$. Conclusione l'unico punto critico é $P = (1, \frac{-1}{2})$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$D^2 f = e^{x^2y+y^2} \begin{pmatrix} (1+2xy)2xy + 2y & 2x + (1+2xy)(x^2+2y) \\ 2x + (1+2xy)(x^2+2y) & 2x + x(x^2+2y)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

nel punto critico $D^2 f(P) = e^{x^2y+y^2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{detD^2f(P)} = -2-4 = -6 < 0$

Il punto critico è di sella.

c) $f(x,y) = (1-x^2)^2(y-1)(y-2)$

$\nabla f(x,y) = (-4x(1-x^2)(y-1)(y-2), (1-x^2)^2(2y-3)) = (0,0)$. La seconda equazione implica $x = 1$, $x = -1$, e$y = \frac{3}{2}$, La prima equazione $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$ $y = 1$ e $y = 2$. Quindi tutti i punti $(1,y)$ e $(-1,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$ sono critici e inoltre $(0, \frac{3}{2})$.Calcoliamo la matrice Hessiana

$$D^2 f = \begin{pmatrix} (-4+12x^2)(y-1)(y-2) & -4x(1-x^2)(2y-3) \\ -4x(1-x^2)(2y-3) & 2(1-x^2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

nei punti critici $x = \pm 1$ $D^2 f = \begin{pmatrix} -4(y-1)(y-2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{detD^2f(P)} = 0$

Non si può stabilire dalla matrice, tuttavia si osservi che se y_o è tale che $(y_o-1)(y_o-2) > 0$ allora in un intorno di y_o questo è ancora vero e dunque in un intorno di $(1, y_o)$ è verificato $f(x,y) \geq f(1,y_o) = 0$ e dunque si tratta di un minimo locale. Nel caso inc ui y_o è tale che $(y_o-1)(y_o-2) < 0$ allora $f(x,y) \leq f(1,y_o) = 0$ e dunque si tratta di un massimo locale. I punti $(1,1)$

e $(1,2)$ non sono né di minimo né di massimo. Lo stesso vale per i punti $(-1, y)$.

Invece in $(0, \frac{3}{2})$

$$detD^2 f(0, \frac{3}{2}) = (-4\frac{1}{2}\frac{-1}{2}.2) = 2 > 0 \text{ inoltre} \partial_{xx} f(0, \frac{3}{2}) = 1 > 0.$$

Quindi $(0, , \frac{3}{2})$ è un punto di minimo locale.

Esercizio 4 Calcolare i seguenti integrali

a) $\int\int_D x+2y\; dxdy$ con $D = [-1,2]\times[0,4]$

$$\int\int_D x+2y\, dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_0^4 x+2ydy = \int_{-1}^{2} [xy+y^2]_0^4 dx = \int_{-1}^{2} 4x+16dx =$$

$$= [2x^2+16x]_{-1}^2 = 2\cdot 4+32-2-(-16) = 54$$

b) $\int\int_T y\; dxdy$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$.

Il triangolo è determinato dalle tre rette $y = x$, $y = \frac{x}{2}$, $x = 1$. Pertanto:

$$\int\int_T y\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} ydy = \int_0^1 [\frac{y^2}{2}]_{\frac{x}{2}}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-\frac{1}{4})dx = \frac{3}{8}\int_0^1 x^2dx = \frac{3}{8}[\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{8}$$

c) $\int\int_D xy\; dxdy$ con $D = \{(x,y), 3x \le y \le 4-x^2\}$.

Dobbiamo determinare i punti di intersezione tra la retta $y = 3x$ e la parabola $y = 4-x^2$. Quindi trovare x tale che $3x = 4-x^2$ i.e. $x^2+3x-4 = 0$ cioè $x = 1$ e $x = -4$. Per cui si ottiene

$$\int\int_D xy\, dxdy = \int_{-4}^{1} dx \int_{3x}^{4-x^2} xydy = \int_{-4}^{1} x[\frac{y^2}{2}]_{3x}^{4-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{1} x(4-x^2)^2 - x\cdot 9x^2dx = \frac{1}{2}[\frac{-1}{6}(4-x^2)^3 - \frac{9}{4}x^4]_{-4}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{-1}{6}(4-1^2)^3 - \frac{9}{4}1^4 - \frac{-1}{6}(4-(-4)^2)^3 + \frac{9}{4}(-4)^4] = \frac{1}{2}[\frac{-9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{12^3}{6} + 9\cdot 4^3]$$

$$= -\frac{27}{8} - 144 + 9\cdot 32 = -\frac{27}{8} + 144$$

d) $\int\int_D e^{x^2+y^2}\; dxdy$ con $D = \{(x,y), 1 \le x^2+y^2 \le 3\}$.

Usando le coordinate polari $D = \{(\rho,\theta), 1 \le \rho \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Quindi

$$\int\int_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{3}} e^{\rho^2}\rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2}[e^{\rho^2}]_1^{\sqrt{3}} = \pi(e^3-e).$$

e) $\int\int_D x\; dxdy$ con $D = \{(x,y), -1 \le x+y \le 1, -2 \le x-y \le 0\}$.

Facendo la sostituzione

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

Si ha che $D = \bar{D} = \{(u,v), -1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 0\}$ e usando lo Jacobiano

$$dxdy = |det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}|dudv = \frac{1}{2}dudv$$

quindi si ottiene

$$\int\int_D x\,dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(u+v)\,dv = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} [uv+\frac{v^2}{2}]_{-2}^{0}\,du = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} -2u+2\,du = 1$$