

Primo foglio di Esercizi di Matematica, 05/06

prof. I. Birindelli

1) Dimostrare la seguente proposizione:

Se  $A \subset B$  allora  $A \cap B = A$ .

2) Sia  $q$  è un numero razionale più piccolo di  $\sqrt{2}$ . Dimostrare che  $\frac{2}{q}$  è più grande di  $\sqrt{2}$ . Dimostrare che  $q_1$  la media aritmetica di  $q$  e  $\frac{2}{q}$  è un numero razionale ed è più vicino a  $\sqrt{2}$  rispetto a  $q$ . E' possibile determinare un numero razionale  $q_2$  più vicino a  $\sqrt{2}$  di  $q_1$ ?

3) Al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$$i) \frac{x-2}{x+1} \leq \frac{2x+1}{x-3}, \quad ii) ax+4 > x+1$$

$$iii) \sqrt{x-2} \geq -1 \quad (\text{attenzione!}), \quad iv) -\frac{1}{2} < \sin(2x + \frac{\pi}{2}) < \frac{1}{2}$$

4) Risolvere le seguenti equazioni:

$$|2x-1| = x+1, \quad |x+2| + |x-1| = |x-2|.$$

5) Siano A,B,C, D i vertici di un parallelogramma. Sia  $\vec{u} = \vec{AD}$  e  $\vec{v} = \vec{AB}$ . Determinare il vettore  $\vec{BD}$  in termini dei vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$

6) Sia  $\vec{v} = (1, -4)$ . Determinare  $\vec{w}$  di lunghezza 2, parallelo a  $\vec{v}$  di verso opposto a  $\vec{v}$ .

7) Se  $\vec{v}_1 = (1, 2)$  e  $\vec{v}_2 = (2, -1)$  allora scomporre  $\vec{w} = (4, 5)$  in termini di  $\vec{v}_1$  e di  $\vec{v}_2$

8) Determinare i vettori ortogonali a  $\vec{w} = (1, -3)$  di lunghezza 1.

9) Sia  $T$  il triangolo avente un lato  $a = 2$  e avente come angoli  $\beta = \frac{\pi}{4}$  e  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ . Determinare l'angolo  $\alpha$  e la lunghezza degli altri due lati  $b$  e  $c$ .

(Qui si è scelto  $\alpha$  l'angolo opposto al lato  $a$  e  $\beta$  l'angolo opposto al lato  $b$ ).

10) Sia  $T$  un triangolo che ha un lato coincidente con il diametro di un cerchio e avente un vertice  $A$  sul cerchio. Dimostrare che  $T$  è un triangolo rettangolo.

(Suggerimento: Disegnare la figura, dividere il triangolo in due triangoli tracciando il raggio dal centro del cerchio ad  $A$ . Dimostrare prima che questi due triangoli sono isosceli. Ricordarsi dunque che la somma degli angoli di un triangolo è  $\pi$  e che l'angolo piatto è  $\pi$ .)

11) Considerando il triangolo dell'esercizio precedente dedurre la lunghezza dei lati del triangolo sapendo che il cerchio ha raggio  $R = 2$  e l'angolo tra il diametro e uno degli altri lati è  $\frac{\pi}{3}$ .