

Primo foglio di Esercizi di Matematica, 04/05
prof. I. Birindelli

1. Dimostrare la seguente proposizione:

Se $A \subset B$ allora $A \cap B = A$. Dire perché $\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$.

2. Sia q è un numero razionale più piccolo di $\sqrt{3}$. Dimostrare che $\frac{3}{q}$ è più grande di $\sqrt{3}$.
Determinare un'altro numero razionale che è più vicino a $\sqrt{3}$ rispetto a q .

3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$$i) \frac{x-2}{x+1} \leq \frac{2x+1}{x-3}, \quad ii) ax+4 > x+1$$

$$iii) \sqrt{x-2} \geq -1 \text{ (attenzione!)}, \quad iv) -\frac{1}{2} < \sin(2x + \frac{\pi}{2}) < \frac{1}{2}$$

4. Risolvere le seguenti equazioni:

$$|x+2| + |x-1| = |x-2|.$$

$$|x^2 + 3x - 2| = 2.$$

5. Siano A,B,C, D i vertici di un parallelogramma. Sia $\vec{u} = \vec{AD}$ e $\vec{v} = \vec{AB}$. Determinare il vettore \vec{BD} in termini dei vettori \vec{u} e \vec{v}

6. Sia $\vec{v} = (1, -4)$. Il vettore \vec{w} di lunghezza 2, parallelo a \vec{v} di verso opposto a \vec{v} .

7. Se $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1)$ allora scomporre $\vec{w} = (4, 5)$ in termini di \vec{v}_1 e di \vec{v}_2

8. Determinare i vettori ortogonali a $\vec{w} = (1, -3)$ di lunghezza 1.

9. Sia T il triangolo avente un lato $a = 2$ e avente come angoli $\beta = \frac{\pi}{4}$ e $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Determinare l'angolo α e la lunghezza degli altri due lati b e c .

(Qui si è scelto α l'angolo opposto al lato a e β l'angolo opposto al lato b).

10. Sia T un triangolo che ha un lato coincidente con il diametro di un cerchio e avente un vertice A sul cerchio. Dimostrare che T è un triangolo rettangolo.

(Suggerimento: Disegnare la figura, dividere il triangolo in due triangoli tracciando il raggio dal centro del cerchio ad A . Dimostrare prima che questi due triangoli sono isosceli. Ricordarsi dunque che la somma degli angoli di un triangolo è π e che l'angolo piatto è π .)

11. Considerando il triangolo dell'esercizio precedente dedurre la lunghezza dei lati del triangolo sapendo che il cerchio ha raggio $R = 2$ e l'angolo tra il diametro e uno degli altri lati è $\frac{\pi}{3}$.