Quinto foglio di Esercizi di Matematica, 01/02
I. Birindelli

1)Determinare quali delle seguenti successioni sono "definitivamente" positive

$$a_n = \frac{n-3}{n}, \; b_n = 16 - 2^n \; c_n = \sin\frac{n\pi}{4}$$

2) Data la successione definita nel seguente modo

$$\begin{aligned} &a_1 = 3 \\ &a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + \tfrac{4}{a_{n-1}}) \end{aligned}$$

a. Calcolare a_2, a_3 e a_4. Dimostrare che $a_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
b. Dimostrare che se esiste il $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $l = 2$.
c. Si supponga ora che $a_1 = 2$. Studiare la nuova successione.

3) Sia $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Calcolare b_1 e b_2. Dimostrare che b_n é una successione monotona decrescente. (Suggerimento dimostrare che $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$ procedende come per la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.)

Se ne deduca che $a_n \leq 4$.

4) Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{2n+3}{n+2}, \; b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}, \; c_n = \frac{\cos n\pi}{n}, \; d_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$u_n = (1 - \frac{1}{n^2})^{n^2}, v_n = (1 - \frac{1}{n})^{2n}$$

(Si ricorda che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{a}{n}) = e^a$.)

5) Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n \cos n\pi}{n}$ non ammette limite.

6) Costruire una successione che diverge a piu infinito ma che non sia monotona crescente.

7) Sia a_n la successione definita nel seguente modo

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

calcolare a_3, a_4, a_5, dimostrare che a_n é monotona crescente, dimostrare che $a_n \geq n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dedurne che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.