Istituzioni di Matematiche II

Prof. Birindelli

Compiti per le vacanze

1) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1,\ \sqrt{3}|x| < y\}$. Calcolare l'integrale

$$\int_D (x^2 + y^2)^3 dx.$$

(Si ricorda che $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.)

2)Determinare l'area del sottoinsieme A di R^2 definito da $A := \{(x, y) \in R^2 \ \text{ t.c. } y \geq |x| \text{ and } y < 12 - x^2\}$

3) Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = b \geq 0 \end{cases}$$

Risolvere al variare di $b \in \mathbb{R}$. 4) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & y^2 - 2y \\ y(0) & = & \alpha \end{cases}$$

si determini il parametro reale $\alpha \geq 0$ in modo che la soluzione risulti infinitesima per $t \to +\infty$.

5) Determinare per quali $\alpha \in (\frac{1}{4}, +\infty)$ il seguente problema

$$\begin{cases} y'' + y' + \alpha y & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non nulle.

6)Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + y & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1. \end{cases}$$

7) a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{|x-1|}{x-3}dx$$

8) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = \frac{2x}{x^2+1}y + 3$ che verifica la condizione $y(0) = 1$.

9) Sia D il solido dato da $D = \{(x, y, z); x \geq 0, 1 \geq y \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 1\}$. Se la densità di D è data da $\rho(x, y, z) = 1 - y$.

a) Disegnare D

b) Determinare la massa di D

10) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}\,.$$

11)Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & 0 \leq x < 1 \\ \log 2 + (x-1)e^x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

è integrabile in [0,2] e, in caso affermativo, calcolare l'integrale definito di f in [0,2].

12)Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x\log x} \\ y(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

13)Sia $D := \{(x, y)\text{tali che } x^2 + y^2 > 1,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$. Disegnare il dominio D e determinarne l'area.

14) Determinare l'area della superficie ottenuta ruotando la curva $\mathcal{C} = \{y = \sqrt{2x+1},\ 0 \leq x \leq 3\}$ intorno all'asse delle x.

15) Sia $D = \{(x,y):$ tali che $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Calcolare $\int_D e^{x^2+y^2} dxdy$.

16) Consideriamo il solido $V = \{(x,y,z),\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y+z \leq 2, x \leq 4-y^2\}$. Determinare la massa di V se ha come densità $\rho = x^{\frac{1}{2}}$.

17) Sia V il solido cilindrico con asse parallelo all'asse delle z e che ha per base il dominio D esterno al disco di raggio 1 e centro l'origine e interno al disco di raggio $\frac{3}{2}$ e centro $P_o = (\frac{3}{2}, 0)$ e compreso tra $z=0$ e $z=4$. Calcolare $\int_V cos(x^2+y^2)dxdydz$.

18) Sia V il prisma con asse parallelo all'asse delle z e che ha per base il triangolo del piano $x\ y$ determinato da $x=0$, $y=x$, $y=1$, compreso fra il piano $z=0$ e $z=2-x$. Disegnare V e calcolare $\int_V \cos z dxdydz$.

19) Determinare il volume del solido sotto al paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ sopra al piano xy ed esterno al cilindro $x^2+y^2=1$.

20) Calcolare l'area della regione piana compresa tra $y = 1/x$ e le rette $x=1$ e $x=2$.

21) Determinare la lunghezza dell'arco di parabola $y = \frac{x^2}{2}$ tra $x=0$ e $x=2$.