Matematica I, I. Birindelli

1. Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni

   $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x}-1}$, $\qquad g(x) = \log(x^3 - 3x)$, $\qquad h(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3+x}{-x+2}\right)}$, $\qquad k(x) = \log\tan(2x)$.

2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}, \quad \lim_{x\to 0} \sin x \sin(\frac{1}{x}), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}, \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$$

3. Determinare l'insieme dei punti di discontinuità della funzione $f(x) = [x^2]$ ($[x]$ indica la parte intera di x, cioè $[x] = n \in N$ tale che $n \leq x$ e $n + 1 > x$).).

4. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $\tan x = x$ nell'intervallo $(0, \pi)$.

   (Facoltativo: Dimostrare che esistono infinite soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}$).

5. Dimostrare che il polinomio $g(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ ha almeno due radici reali.

6. Dimostrare che l'equazione $\cos x = x$ ha una soluzione nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

7. Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$2(\sin x)^2 - 3\sin x - 2 = 0$$

8. Dimostrare che esiste un numero reale $x \in (-6, -2)$ che risolve l'equazione $e^x + x + 2 = 0$.

9. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $4x^2 - e^x = 0$ nell'intervallo $[0, 1]$.

10. Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $\cos(3x) = x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

11. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è continua la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{per} \quad x > 0 \\ 3x + a & \text{per} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

12. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{per} \quad x > 0 \\ -x^2 & \text{per} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

    è continua.