Corso di Laurea TAC . Matematica 1. Birindelli

PROVA SCRITTA del 5 luglio 2005

Cognome: .... **Nome**: ....

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ determinare le coordinate dei vettori

$$\vec{w} = |\vec{u} + \vec{v}|\vec{u}, \quad \vec{z} = < \vec{u}, \vec{v} > \vec{v}$$

b) Determinare λ affinché il vettore $\vec{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 4 \end{pmatrix}$ sia parallelo a $\vec{u}$.

Risposta:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$< \vec{u}, \vec{v} >= 1 \times 1 + (-1) \times 3 = -2$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori siano paralleli:* $\vec{z} = t\vec{u}$ *per qualche* $t \in R$.

Si ottiene $\begin{cases} \lambda = t \\ 4 = -t \end{cases}$ *cioè* $\lambda = -4$ *e* $\vec{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. a) Determinare l'equazione cartesiana di Π piano dello spazio passante per il punto $P_o = (1, 1, -2)$, e ortogonale al vettore $\vec{P_oP_1}$ dove $P_1 = (2, 0, 1)$.

b) Determinare l'equazione cartesiana o parametrica della retta per P_0 parallela a $\vec{OP_1}$.

Risposta:

a) *Per prima cosa determiniamo le coordinate del vettore* $\vec{P_oP_1} = (1, -1, 3)$. *Un punto* $P = (x, y, z)$ *appartiene al piano* Π *se* $\vec{P_oP}$ *e* $\vec{P_oP_1}$ *sono ortogonali i.e. se* $< \vec{P_oP}, \vec{P_oP_1} >= 0$. *Dato che* $\vec{P_oP} = (x-1, y-1, z+2)$ *otteniamo:*

$$(x-1) - (y-1) + 3(z+2) = 0, \ \textit{cioè} \ \ x - y + z = -6.$$

b) *Siccome il vettore* $\vec{OP_1}$ *ha le stesse coordinate di* P_1 *le equazioni parametriche della retta cercata sono:*

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. *Determinare quante soluzioni (x, y, z, t) ammette il seguente sistema*

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ x + y = 0 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

Risposta

Siccome il determinante della matrice A dei coefficienti è:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 - 1(1 - 2) = 0.$$

Quindi il rango di A è 2 . Per sapere quante soluzioni ha il sistema dobbiamo sapere qual'è il rango della matrice completa. Per il Teorema degli orlati, per determinare il rango sara' sufficiente calcolare il determinante della matrice completa alla quale abbiamo sottratto la prima colonna:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -1(2 + 3) = -5 \neq 0$$

Quindi il rango della matrice completa è 3

Per il teorema di Rouche' Capelli il sistema non ammette nessuna soluzione.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x+4}$

a)Determinare l'insieme di definizione di f

Risposta: *Siccome dobbiamo richiedere che* $x+4 \neq 0$ *cioè* $x \neq -4$, *l'insieme di definizione è* $R \setminus \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

b) Determinare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{4}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{4}{x})} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{4}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{4}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-4^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-4^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

c) Determinare gli asintoti della funzione f

Risposta: *Dai limiti ottenuti in b) se ne deduce che* $x = -4$ *è un asintoto verticale, mentre in* $+\infty$ *e in* $-\infty$ *si potrebbe avere un asintoto obliquo. Per verificarlo è necessario calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{4}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{4}{x})} = 1$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+4} = 0$$

e l'asintoto è dato da $y = x$ *sia in* $+\infty$ *che in* $-\infty$.

d) Calcolare $f'(x)$

Risposta: *Usando la derivata del rapporto otteniamo*

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+4) - (x^2+4x+1)(1)}{(x+4)^2} = \frac{x^2+2x+15}{(x+4)^2}$$

e) Determinare gli intervalli di monotonia di f

Risposta: *Gli intervalli di monotonia di* f *coincidono con gli intervalli in cui la derivata non cambia segno. Siccome* f' *ha lo stesso segno di* $x^2+2x+15$ *e siccome* $x^2+8x+15 = 0$ *per* $x = -3$ *e* $x = -5$ *otteniamo che*

f' *è positiva in* $(-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$ *quindi* f *è monotona crescente in* $(-\infty, -5)$ *e in* $(-3, +\infty)$.

f' *è negativa in* $(-5, -4) \cup (-4, -3)$ *quindi* f *è monotona decrescente in* $(-5, -4)$ *e in* $(-4, -3)$.

f) Determinare l'immagine di f

Risposta: *Dal punto e) sappiamo che* -5 *è un massimo locale e* -3 *è un minimo locale.* $f(-5) = -6$, $f(-3) = -2$. *Se ne deduce che* $Imf = (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$.

g) **Disegnare il grafico di** f **e di** $|f|$

Esercizio 5. a) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \pi - 2x^3 + \sqrt{x}\,.$$

b) Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x+3}dx$.

Risposta:

a) *Usando il fatto che la primitiva di una somma è la somma delle primitive si ottiene:*

$$F(x) = \int f(x)dx = \pi x - 2\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} + C = x\pi - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

b) $\int_0^2 \sqrt{2x+3}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2x+3)^3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}(\sqrt{98} - \sqrt{27})$.