Esercizio 1

determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità (i.e. l'insieme dei punti in cui la funzione è continua) delle funzioni seguenti:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} \qquad g(x) = \sqrt{1 - 2\sin(x)} \qquad h(x) = x \,\mathrm{sgn}(x)$$

dove $\mathrm{sgn}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita come

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Esercizio 2

Sia $f(x) = x\,(x - e^{-x})$

(a) Dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 2]$;

(b) Dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno due soluzioni in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3

Si determini l'immagine delle seguenti funzioni

$$f(x) = \mathrm{arctg}(e^x) \quad \text{per } x \in [-1, 2]$$

$g(x) = e^{|x-1|}$ per $x \in [-1, 2]$

Si dica se si tratta di funzioni invertibili.

Svolgimento

Esercizio 2

Sia $f(x) = x(x - e^{-x})$

(a) Dimostrare che l'equazione $f(x)=1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0,2]$.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

Risolvere $f(x) = 1$ in $[0,2]$ $\iff$ Risolvere $f(x) - 1 = 0$ in $[0,2]$

i.e., se

$$g(x) := f(x) - 1$$

sto cercando uno zero della funzione g in $[0,2]$

$$g(x) = x(x - e^{-x}) - 1$$

- $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua
- $g(0) = -1 < 0$
- $g(2) = 2(2 - e^{-2}) - 1$

$$= 2(\underbrace{2 - \frac{1}{e^2}}_{>1}) - 1 > 0$$

perché $$2-\frac{1}{e^2}>1 \qquad \left(\text{i.e. } 1>\frac{1}{e^2}, \text{ i.e. } e^2>1\right)$$

vera

Quindi
$$2\underbrace{\left(2-\frac{1}{e^2}\right)}_{>1}-1 > 2-1=1>0$$

Per il Teo. di esistenza degli zeri, so che

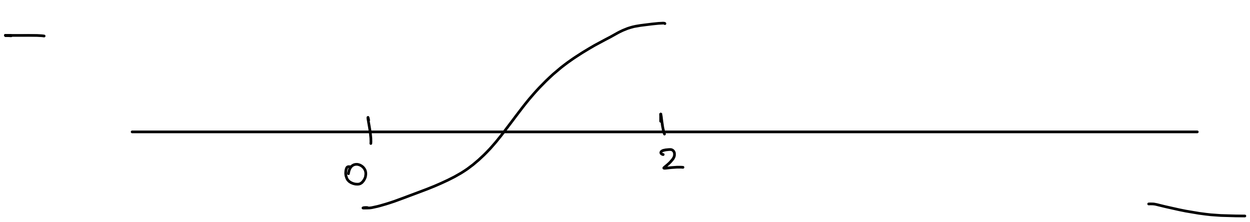
$\exists\ c\in(0,2)$ t.c. $f(c)-1=g(c)=0$

i.e. $$f(c)=1$$

(b) Dimostrare che l'equazione $f(x)=1$ ammette almeno due soluzioni in $\mathbb{R}$.

$g(x)=x(x-e^{-x})-1$ ha uno zero in $[0,2]$

$g(0)=-1, \quad g(2)>0$



$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - x e^{-x} - 1 =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} - 1 = +\infty$$

- $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - x e^{-x} - 1 = +\infty$$

$\exists\ R > 0$ t.c.

$$g(x) > 1 \qquad \forall x \leq -R$$

Applico il Teo. di esistenza degli zeri alla

$$g : [-R, 0] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{cont.}$$

$$g(-R) > 1 \qquad g(0) < 0$$

$$\leadsto \exists\ c_2 \in (-R, 0) : g(c_2) = 0$$

Esercizio 1

$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

dom(f) $\quad x^2 - x^3 \geq 0$

$x^2(1-x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 1$

- $x^2 \geq 0$ sempre
- $1 - x \geq 0$
  $x \leq 1$

$\text{dom}(f) = (-\infty, 1]$

$$(-\infty, 1] \xrightarrow{h} [0, +\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 - x^3 \longmapsto \sqrt{x^2 - x^3}$$

$$y \underset{g}{\longmapsto} \sqrt{y}$$

$f = g \circ h \qquad g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\qquad\qquad h : (-\infty, 1] \longrightarrow [0, +\infty)$ continua

$\Rightarrow$ f è continua in $\text{dom}(f) = (-\infty, 1]$ perché composizione di funzioni continue.

Esercizio 3

$g(x) = e^{|x-1|}$ per $x \in [-1,2]$

$\mathrm{Im}(g) = ?$

Si dica se si tratta di funzioni invertibili.

$$\begin{aligned} [-1,2] &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x-1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{h} \mathbb{R} \\ y &\longmapsto e^{y} \end{aligned}$$

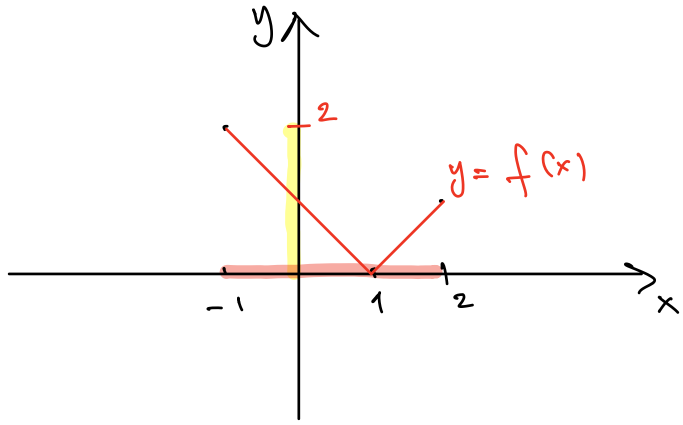
$g = h \circ f$

$\mathrm{Im}(g) = \{ g(x) : x \in [-1,2] \}$

$= \{ h(f(x)) : x \in [-1,2] \}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(x) : x \in [-1,2] \} = [0,2]$

$f(x) = |x-1|$



$h(y) = e^y$ cont. e crescante

$$\mathrm{Im}(g) = \{ h(f(x)) : x \in [-1, 2] \}$$

$$= \{ h(y) : y \in \mathrm{Im}(f) = [0, 2] \} = [h(0), h(2)]$$

$$= \{ e^y : y \in [0, 2] \} = [1, e^2]$$

- g non iniettiva perché $f(x) = |x-1|$ non è iniettiva

$$f(0) = f(2) = 1$$

$$g(0) = h(f(0)) = h(f(2)) = g(2) = e$$

g non iniettiva $\Longrightarrow$ g non invertibile

Esercizio 3

Si determini l'immagine della seguente funzione

$f(x) = \arctg(e^x)$ per $x \in [-1,2]$

Si dica se è invertibile.

$$\begin{aligned} [-1,2] &\xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

continua
strett. crescente

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\beta} (-\pi/2, \pi/2) \\ y &\longmapsto \arctg(y) \end{aligned}$$

continua
strett. cresc.

$f(x) = (\beta \circ \alpha)(x)$ è strett. crescente:

siano $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 2$. Voglio mostrare che

$$\arctg(e^{x_1}) = f(x_1) < f(x_2) = \arctg(e^{x_2}) \qquad (1)$$

Ora $\arctg(\cdot)$ è strett. crescente, quindi (1) è vera se e solo se

$$e^{x_1} < e^{x_2} \qquad (2)$$

Poiché $x \mapsto e^x$ è strett. crescente, la (2) è vera se e solo se

$$x_1 < x_2$$

- f strett. crescente $\Rightarrow$ f iniettiva, quindi invertibile

- $\text{Im}(f) = \{ \text{arctg}(e^x) \ : \ x \in [-1,2] \} =$

$\{ e^x : x \in [-1,2] \} = [\frac{1}{e}, e^2]$

$= \{ \text{arctg}(y) \ : \ y \in [1/e, e^2] \}$

$= [\text{arctg}(1/e), \text{arctg}(e^2)]$

$f^{-1} : [\text{arctg}(1/e), \text{arctg}(e^2)] \longrightarrow [-1,2]$