Esercizi di Istituzioni Matematiche I, I. Birindelli

2) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3},\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

3) Calcolare la derivata rispetto ad x delle seguenti funzioni:

$$f_1(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\quad f_2(x)=e^{x\,\mathrm{tg}x}$$

$$f_3(x)=(\log x)^3,\quad f_4(x)=\frac{x^p}{x^m-a^m}$$

4) Calcolare la derivata in $x=0$ di

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x} & \text{per } x>0\\ x^2+3x+1 & \text{per } x\le 0\end{cases}$$

5) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}$$

6) Si dimostri, usando la definizione di limite, che se esiste $l=\lim_{n\to\infty}a_n$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}-a_n=0$$

7) Studiare al variare di $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}$ la derivabilità e la continuità in 1 della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1} & x>1\\ ax+2b & x\le 1\end{cases}$$

8) Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x)>0$ per ogni $x\in[0,1]$. Dimostrare che allora esiste un numero reale $\alpha>0$ tale che $f(x)\ge\alpha$. (Usare il teorema di Weierstrass)

9) Dimostrare che il polinomio $g(x)=x^4+7x^3-9$ ha almeno due radici reali.

10)Dimostrare che l'equazione $\cos x=x$ ha una soluzione nell'intervallo $[0,\pi/2]$.

11) Sia $f(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ e $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, dimostrare che f è limitata.

12)) Determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto, e gli intervalli di monotonia per le seguenti funzioni considerate nei loro insiemi di definizione: $f(x):=x+1/x$, $g(x):=\frac{x}{x^2+1}$, $h(x):=\sqrt{x}-2\sqrt{x+2}$, $k(x):=2x+\frac{1}{x^2}$.

13) Sia $f(x)=\cos ax$, con $a\in\mathbb{R}$. Trovare l'espressione della derivata n-esima di f in un generico punto x.

14) Determinare i punti di discontinuità della funzione $f(x)=x-[x]$ ([x]=parte intera di $x=n\in N$ tale che $n\le x$ e $n+1>x$).

15) Studiare il grafico della funzione

$$f(x)=e^{-x-|x^2-x-2|}$$

con $x \in \mathbb{R}$.
16) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x}\left(\log|x| + \frac{x}{|x|}\right)$$

17) Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+3} & x > 2 \\ ax^2 - bx + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che f sia una funzione continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.
18)Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

19) Dimostrare che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

20) Trovare i punti di intersezione tra la retta passante per i punti $(4,-1)$ e $(2,3)$ e la circonferenza di raggio 2 e centro il punto $(1,0)$.
21)Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x - \alpha y + 2z = 3 \end{cases}$$

22) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 2y - 2z - t = 1 \\ x - y + z + 2t = 2 \\ x + y - z - 2t = 1 \\ 2y - 2z - t = -2 \end{cases}$$

23) Siano f e g due funzioni continue in un intervallo $[a,b]$. Dimostrare che la funzione $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è continua. (Dimostrare prima che $h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$, e usare poi le proprietà delle funzioni continue.
24)Provare che se f e g sono continue nell'intervallo $[a,b]$, allora anche la funzione prodotto $f.g$ é continua in $[a,b]$.
25)Sia f derivabile in un intervallo $]a,b[$
  25a) Provare che se $f'(x) = 0, \forall x \in]a,b[$, allora f é costante,
  25b)Provare che se $f'(x) = c, \forall x \in]a,b[$, dove c é una costante e se $f(x_o) = 0$ per allora $f = c(x - x_o)$.
25') Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x - |x^2 - 2x - 3| \geq 0$$

26) Determinare l'insieme dei punti di discontinuita' della funzione $f(x) = (x-1)[x]$
27) Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione cotan$x = x$ nell'intervallo $(0, \pi)$. (Facoltativo: Dimostrare che esistono infinite soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}$)
28) Determinare le coordinate del punto di intersezione delle rette r_1 passante per i punti $(1,0)$, $(2,1)$ e r_2 passante per i punti $(1,-1)$, $(3,-2)$.
29) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x - \alpha y + 2z = -1 \end{cases}$$

30)Risolvere la seguente equazione

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = 4$$

31)Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2+2} & x > 1 \\ ax^2 + b & x \leq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in 1.
32) Sia G il grafico della funzione $f(x) = 4x^3$. Determinare l'equazione di una retta passante per il punto $(0, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) e tangente a G.
33)Trovare l'insieme dei punti equidistanti dai punti $P_1 = (1,3)$ e $P_2 = (-4,2)$.
34)Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

35) Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$2(\sin x)^2 - 3\sin x - 2 = 0$$

36) Dimostrare che esiste un numero reale $x \in (-6,-2)$ che risolve l'equazione

$$e^x + x + 2 = 0$$

37) Determinare l'insieme dei punti $P = (x,y)$ equidistanti dal punto $P_o = (2,0)$ e dalla retta $x = -1$.
38) Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

39) Determinare se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $g(x) = \frac{x+a}{2x^2+3x+1}$ abbia una discontinuita' eliminabile in $x = -1$.

40) Si consideri la funzione f definita, per $x \in (0, \pi)$, da

$$f(x) = \begin{cases} e^{\tan x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determinare se f è continua in $\frac{\pi}{2}$.
41) Calcolare la derivata in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{per } x > 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

42)Siano a, b e c tre numeri reali e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2b \\ 0 & 1 & 2a \\ 2b & 2a & c \end{pmatrix}$$

Determinare c tale che il rango di A sia 2. Calcolare A^2.
43) Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$|\mathrm{tg} 2x| < 1$$

44) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & per\ x > 1 \\ ae^{x-1} & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia continua in 1. (Facoltativo: Determinare se f e' derivabile in 1.)
45) Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione $\cos(3x) = x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
46) Determinare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

47) Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$|\cos 2x| < \frac{1}{2}$$

48)Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{2x^2+3x-2} & x \neq -2 \\ 4 & x = -2 \end{cases}$$

abbia una discontinuita' eliminabile in -2.
49)Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

50) Sia r_1 la retta passante per i punti $(1, -1)$ e $(0, 2)$ e sia r_2 la retta passante per il punto $(0, 1)$ ortogonale al vettore $(1, 1)$. Determinare le coordinate del punto di intersezione delle rette r_1 e r_2.

51)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log|2x+1| + \frac{2x}{|x|}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e punti di discontinuita' e disegnare il grafico).
52)Studiare il grafico della funzione $f(x) = e^{x+|x^2-1|}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti, punti angolosi, convessità e disegnare il grafico).
53) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2x+3}{|x^2-1|+x^2}$$

In particolare determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, i punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti, punti angolosi e disegnare il grafico.
54)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+3}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e disegnare il grafico).
55)Studiare il grafico della funzione $f(x) = 2\log|2x-3|$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e punti di discontinuita' e disegnare il grafico).
56)Studiare il grafico della funzione $f(x) = 2\sqrt{|2x-3|}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e punti di discontinuita' e disegnare il grafico).
57)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log(x^2-2x-1)$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e disegnare il grafico).
58) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{x^2+1}-x)$ (determinare: insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, asintoti e disegnare il grafico).
59)Studiare il grafico della funzione

$$g(x) = \sin x + \cos x$$

In particolare determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(0, g(0))$.
60)Studiare, nel suo dominio di definizione, il grafico della funzione

$$g(x) = \log(\sin x).$$

In particolare, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\frac{\pi}{4}, g(\frac{\pi}{4}))$.
61)Studiare, nel suo dominio di definizione, il grafico della funzione

$$g(x) = \log(\cos x).$$

In particolare, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\frac{\pi}{4}, g(\frac{\pi}{4}))$.
62)Studiare il grafico della funzione $g(x) = e^{-x^3+3x^2}$. In particolare determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di coordinate $(2, g(2))$.
63) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq a \\ x+4 & x < a, \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$.
64) Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione

$$4x^2 - e^x = 0$$

nell'intervallo $[0, 1]$.

65) Determinare al variare di $b \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ 2x + by = \pi \end{cases}$$

66) Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione

$$4x^2 - e^x = 0$$

nell'intervallo $[0, 1]$.

67) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha x + 9y + z = 1 \\ x + \alpha y - z = 2 \end{cases}$$

68) Sia dimostrare che esistono almeno due radici reali distinte dell'equazione $0 = x^4 + 7x^3 - 9$.

69)Trovare gli intervalli di Monotonia delle seguenti funzioni:
$f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$, $\quad g(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $\quad h(x) = x - 2\sin x$, $\quad k(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

70) Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni
$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, $\quad g(x) = \log(2^x - 2)$, $\quad h(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3}{x-2}\right)}$, $\quad k(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.

71)Determinare dominio di definizione e calcolare la derivata delle seguenti funzioni
$f(x) = (\log x)^x$, $\quad g(x) = x^{\arctan x}$

72) Studiare il grafico delle seguenti funzioni
$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $\quad g(x) = \frac{1}{\sin 3x}$, $\quad h(x) = \sin x + \sin 2x$, $\quad k(x) = \arctan \frac{1}{|x|}$.

73) Calcolare i seguenti limiti
$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$ (usare il fatto che $\sin \pi x = -\sin(\pi x - \pi)$.
$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{x}$, $\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x-1}$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

74) Sia $a \in \mathbb{R}$, determinare l'equazione parametrica e cartesiana della retta passante per il punto P_o di coordinate $(-1, 1)$ e parallela al vettore $v = (a, 2)$. Determinare a tale che la retta passi per l'origine.

75)Determinare la retta passante per il punto P_o di coordinate $(1, 2)$ e ortogonale al vettore $(3, 4)$.

76) Determinare il punto di intersezione tra la retta passante per i punti P_1 e P_2 rispettivamente di coordinate $(1, 3)$ e $(2, 4)$ e la retta perpendicolare al vettore $\vec{v} = (1, 3)$ passante per il punto P_o di coordinate $(-2, 1)$.

77) Sia il vettore $\vec{w} = (a, 2)$, determinare le coordinate del vettore $\vec{v}$ parallelo e controverso a $\vec{w}$ di lunghezza inoltre determinare i vettori ortogonali a $\vec{w}$ e di lunghezza 1.

78) Sia P_o il punto di coordinate polari $r = 3$ e $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Determinare le coordinate cartesiane di P_o.

79) Sia P_o il punto di coordinate cartesiane $(-3, 4)$. Determinare le coordinate polari di P_o.

80) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1 \\ 3x + 9y + 4z + w = 1 \\ 2x + 6y + 5z - 2w = -1 \end{cases}$$

81) Negare le seguenti proposizioni:
P1:"Esiste uno studente di architettura iscritto al secondo anno che ha superato tutti gli esami"
P2: "$\forall x \in Q \setminus \{0\} \ \exists y \in Q$ tale che $xy = 1$
P3: "Tutti i numeri pari sono dei multipli di 8"

82) Siano (x, y) le coordinate nel sistema di riferimento $(0, \vec{i}, \vec{j})$, sia (x', y') le coordinate nel nuovo sistema di riferimento $(0', \vec{i}, \vec{j})$ dove $0'$ e' il punto di coodinate $(2, -1)$. Determinare le equazioni che determinano il cambiamento di riferimento. Se la retta r è data dall'equazione $2x - y = 2$, determinare la sua equazione nel sistema di riferimento $(0', \vec{i}, \vec{j})$

83) Siano (x, y) le coordinate nel sistema di riferimento $(0, \vec{i}, \vec{j})$, sia (x', y') le coordinate nel nuovo sistema di riferimento $(0, \vec{i}', \vec{j}')$ dove

$$\begin{cases} \vec{i}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ \vec{j}' = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \end{cases}$$

Determinare le equazioni che determinano il cambiamento di riferimento. Se la retta r è data dall'equazione $2x+3y = 1$, determinare la sua equazione nel sistema di riferimento $(0, \vec{i}', \vec{j}')$

84) Sia $0'$ il punto di coordinate $(1, -2)$ sia r la retta di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

Se $0'$ e' la nuova origine e r il nuovo asse delle ordinate,
a)determinare i vettori $\vec{i}'$ e $\vec{j}'$ del nuovo sistema di riferimento
b) determinare le equazioni del cambiamento di riferimento